

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 47B N. 1
FEBBRAIO 2024

Poste Italiane s.p.a. - Spedizione in Abbonamento Postale
D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)
art. 1, comma 1, NE/PD
Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue



CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN
Via S. Giacomo, 4 - 31017 Pieve del Grappa (TV)

**L'Insegnamento della
Matematica e delle
Scienze Integrate**

è un servizio
che il C.R.D. "U. MORIN"
vuole rendere
agli insegnanti della scuola
italiana per il miglioramento
dell'insegnamento
della matematica e,
in senso interdisciplinare,
delle altre scienze.
La rivista distribuita
gratuitamente ai Soci.

Questa testata è associata a



Questa rivista viene
pubblicata con l'aiuto degli
Istituti Filippin dei Fratelli
delle Scuole Cristiane.

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

**VOL. 47B N. 1
FEBBRAIO 2024**

ISSN 1123-7570

Reg. Bassano del Grappa
N. 4/78 r.p. 21-7-78

Spedizione in abb. postale
P.T. - Padova / 50 %

Stampa:
Tipografia Battagin
San Zenone degli Ezzelini

CENTRO RICERCHE DIDATTICHE "UGO MORIN"

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Fondati da Fratel Roberto Sitia

VOLUME 47B N.1

FEBBRAIO 2024

CONSIGLIO DI PRESIDENZA

Domingo Paola

Presidente

domingopaola56@gmail.com

Mario Ferrari

Presidente Onorario

mario.ferrari@unipv.it

Cinzia Bonotto

Presidente uscente

bonotto@math.unipd.it

Donatella Barison

donatella.barison69@gmail.com

Alessia Brunetta

alessiabrunetta@gmail.com

Mariangela Chimento

mariangela.ch@libero.it

Lorenzo Meneghini

lorenzomeneghini69@gmail.com

Silvano Rossetto

rossetto49@gmail.com

Luigi Tomasi

luigi.tomasi@libero.it

Sergio Zoccante

sergio.zoccante@gmail.com

COMMISSIONE SCIENTIFICA

Bonotto C., Ferrari P.L.,
Bartolini Bussi M., Marchi M.,
Paola D., Racugno W.

COLLABORATORI AT LARGE

Boieri P., Dané C., Dematté A.,
Ferri F., Garuti R.,
Pellerey M., Pertichino M.

PROPRIETÀ

C.R.D. "U. MORIN"
31017 Pieve Del Grappa TV

DIRETTORE RESPONSABILE

Mario Ferrari

Dip. Matematica

Università, di Pavia

DIRETTORE ESECUTIVO

Sez.A:

Cinzia Bonotto

Dip. Matematica, Università di Padova

Sez.B:

Pier Luigi Ferrari

Dip. Scienze e Innovazione Tec.,

Università, Alessandria

REDAZIONE

Cinzia Bonotto

Gabriella Cimenti

gabriella@cimenti.it

Mariangela Chimento

mariangela.ch@libero.it

Giampietro Zanon

zanon@filippin.it

CASA EDITRICE

Giovanni Battagin, Editore

Via dell'Artigianato, 2

31020 S. Zenone Degli Ezzelini TV

Tel. 0423 96 82 34(r.a.)

Telefax 0423 96 82 50

SEGRETERIA MORIN

via S. Giacomo, 4 - Paderno

31017 Pieve del Grappa TV

cell. 371 377 80 32

crdm@filippin.it

BIBLIOTECA DEL CENTRO MORIN

Responsabile della Biblioteca, che conta più di 8000 volumi e circa 70 riviste, è la professoressa Mariangela Chimento (mariangela.ch@libero.it) coadiuvata dai prof. Giuliano Testa (nonno.giuli.44@gmail.com) e Luigi Tomasi, dalle insegnanti Maria Luisa Bizzotto (20.2.perla@gmail.com), e da Livio dalla Corte (lvdallacorte@gmail.com).

La Biblioteca è aperta al mattino delle domeniche nelle quali si svolge il corso di aggiornamento e per **appuntamento** con uno dei responsabili. I libri possono essere consultati in loco oppure chiesti in prestito, non più di due contemporaneamente, con restituzione entro 30 giorni. Il prestito è gratuito per i Soci. Vengono naturalmente addebitate le spese postali. **Le riviste sono escluse dal prestito.**

È attivo anche un servizio di fotocopie (10 centesimi a pagina).

Il catalogo della Biblioteca può essere consultato anche visitando il sito: www.filippin.it/morin/biblioteca/default.htm

AGGIORNAMENTO

Responsabili delle attività di aggiornamento: Domenica Baggio (domenica.baggio@tin.it), Mariangela Chimento, Alessandra Gamba, Silvano Rossetto, Luigi Tomasi, Sergio Zocante.

Per richieste al Centro (anche per la pubblicazione di brevi articoli su attività nelle classi o approfondimenti elaborati da studenti) gli indirizzi di riferimento si trovano alla pagina

<http://www.centromorin.it/info/organigramma.htm>

SITO WEB DEL CENTRO MORIN

<http://www.centromorin.it/>

Giovanni Artico (polarprof@libero.it) e Silvano Rossetto

ORGANIZZAZIONE DEL CENTRO

Gabriella Cimenti (gabriella@cimenti.it)

Centro Morin: 371 377 80 32; crdm@filippin.it

INDICE
SEZ. B

Pag.		
6	Presentazione	<i>Pier Luigi Ferrari</i>
7	In memoria di Ercole Castagnola	<i>Michele Impedovo, Domingo Paola, Luigi Tomasi</i>
11	È la solita ellisse? Non proprio!	<i>Ercole Castagnola</i>
25	L'avventura delle rette parallele -1	<i>Mario Ferrari</i>
47	Ci faccio conto. Didattica della matematica e sensibilità alla lingua: un binomio possibile	<i>Barbara Gramegna</i>
65	L'“efficacia” del Liceo Matematico: evidenze dalle prove INVALSI	<i>Claudio Bernardi, Alessandro Gambini, Stefania Gubbiotti, Francesca Coppa, Federica Ferretti, Maria Flavia Mammana, Davide Passaro, Francesco Saverio Tortoriello, Francesca Tovenà</i>
93	Informazioni – Recensioni	<i>La Presidenza</i>

L"efficacia" del *Liceo Matematico*: evidenze dalle prove INVALSI

Sommario

Il progetto "Liceo Matematico" (LM) per le scuole secondarie superiori nasce nel 2015 e si diffonde rapidamente in tutta Italia. Il Liceo Matematico è caratterizzato dall'introduzione di almeno un'ora in più di matematica alla settimana, svolta in modalità laboratoriale e con costante attenzione a contenuti interdisciplinari. Lo scopo di questo articolo è analizzare i risultati delle prove INVALSI degli studenti iscritti alle sezioni LM e confrontarli con i risultati degli studenti iscritti alle stesse scuole ma nelle sezioni non-LM. I dati analizzati indicano che l'adesione al progetto LM ha un impatto positivo sul livello di apprendimento raggiunto sia in matematica sia in italiano.

Abstract

The "Liceo Matematico" (LM) project for high schools established in 2015 and quickly spread throughout Italy. The Liceo Matematico is characterized by the introduction of at least one additional hour of mathematics per week, conducted in a laboratory setting and dealing with interdisciplinary aspects. The aim of this article is to analyze the results of the INVALSI tests of students enrolled in LM sections and compare them with the results of students enrolled in the same schools but in non-LM sections. The analyzed data indicate that joining the LM project has a positive impact on the level of learning achieved both in Mathematics and in Italian.

*Claudio Bernardi, Alessandro Gambini, Stefania Gubbiotti,
Francesca Coppa, Federica Ferretti, Maria Flavia Mammana,
Davide Passaro, Francesco Saverio Tortoriello, Francesca TovenA*

L’“efficacia” del *Liceo Matematico*: evidenze dalle prove INVALSI

Claudio Bernardi*, Alessandro Gambini*, Stefania Gubbiotti*,
Francesca Coppa*, Federica Ferretti**, Maria Flavia Mammana°,
Davide Passaro*, Francesco Saverio Tortoriello°, Francesca
Tovena^

*Sapienza, Università di Roma

**Università di Ferrara

°Università di Catania

°°Università di Salerno

^Università di Roma Tor Vergata

1. Inquadramento dell’indagine svolta all’interno del progetto nazionale *Liceo Matematico*

Negli ultimi anni è emersa l'esigenza di valutare l'eventuale efficacia del percorso proposto dal progetto *Liceo Matematico* per le scuole secondarie di secondo grado, basandosi su criteri oggettivi e rigorosi. Si tratta, cioè, di individuare criteri in grado di misurare quanto un processo formativo incida sulla valorizzazione e sul miglioramento delle situazioni di partenza (Minello R. 2012). Sono frequenti i resoconti e le testimonianze del successo di attività didattiche svolte nel *Liceo Matematico* da parte sia di docenti sia di studenti; ma l'entusiasmo di un racconto è inevitabilmente condizionato da esperienze e convinzioni personali e, in ogni caso, non nasce da un giudizio imparziale.

Lo studio qui presentato nasce come tentativo di risposta a questa esigenza e si prefigge di misurare, sotto diverse lenti interpretative, gli apprendimenti raggiunti sia in italiano sia in matematica dagli studenti aderenti al progetto *Liceo Matematico* e di confrontarli con quelli degli altri studenti non aderenti, in modo rigoroso da un punto di vista statistico.

Dal punto di vista epistemologico e scientifico, il progetto *Liceo Matematico* trova le sue ragioni nella crisi del cosiddetto paradigma cartesiano-newtoniano, che impone un profondo ripensamento su come sia opportuno trasmettere il sapere alle giovani generazioni. In particolare, si tratta di superare la concezione di una netta e invalicabile separazione tra due distinte aree del sapere (Rogora, Tortoriello, 2018). Da un lato, quella scientifica, dominio dell'esattezza e della certezza; dall'altro quella umanistica basata sulla suggestione, la retorica, l'espressione artistica. Infatti, se si tiene in debito conto l'evoluzione delle scienze a cavallo fra '800 e '900 (scoperta delle geometrie non euclidee, sviluppi della termodinamica, relatività, fisica quantistica) risulta evidente che si sono affermati modelli scientifici di tipo probabilistico e storicistico, che implicano un concetto di verità parziale e in costante ridefinizione. La tendenza descritta si è poi rafforzata con le teorie della complessità che estendono di fatto all'intera realtà esplorabile dal punto di vista scientifico l'approccio "sistemico" già maturato in ambito cibernetico agli inizi del XX secolo. In questo contesto epistemologico perde di senso la parcellizzazione e la frantumazione dei saperi disciplinari che, laddove non posti in relazione tra di loro, restano – per usare una icastica espressione di Edgar Morin – dei "segmenti morti", incapaci di formare un pensiero complesso e di rispondere alle domande di conoscenza che provengono da ambiti interconnessi e intesi sempre come parti di un più ampio sistema globale.

La finalità generale da perseguire nell'ottica di una vera riforma della didattica consiste quindi in un radicale cambiamento di prospettive. Come afferma ancora Morin: *"Si tratta di sostituire un pensiero che separa e che riduce con un pensiero che distingue e che collega. Non si tratta di abbandonare la conoscenza delle parti per la conoscenza delle totalità, né l'analisi per la sintesi: si deve coniugarle"*.

Precisate queste idee di fondo, vediamo come si realizza il progetto *Liceo Matematico*. Da un punto di vista operativo, il *Liceo Matematico* si fonda su una stretta, reale e proficua collaborazione tra ricercatori universitari di didattica della matematica e insegnanti

delle scuole secondarie di secondo grado (Capone, Rogora, Tortoriello, 2017). Il progetto, nato presso l'Università di Salerno, prevede una continua formazione dei docenti e, per quanto riguarda gli studenti, prevede ore aggiuntive – almeno una a settimana, circa 30 nell'anno scolastico – rispetto a quelle curricolari. Durante le ore aggiuntive vengono approfonditi - prevalentemente in modalità interdisciplinare - contenuti di matematica con l'obiettivo di ampliare la formazione culturale degli studenti e svilupparne le capacità critiche e l'attitudine alla ricerca. Le attività si svolgono sempre in modalità laboratoriale, in linea con l'idea di laboratorio di matematica così come delineato in *Matematica per il cittadino* dell'U.M.I. (<https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/>) e nel rispetto delle *Indicazioni nazionali* ministeriali relative agli obiettivi specifici di apprendimento. Attualmente più di 25 Università e oltre 140 scuole del secondo ciclo, distribuite su tutto il territorio italiano, partecipano al progetto. Il *Liceo Matematico* rappresenta una realtà di spicco nell'ambito delle iniziative educative, dimostrando un elevato livello di attività e coinvolgimento (Bernardi et al., 2022). In relazione alle attività condotte in questi anni sono state sviluppate diverse ricerche, frutto della collaborazione tra insegnanti e ricercatori, che sono state oggetto di pubblicazioni scientifiche (si veda, ad esempio, Cirmi, D'Asero, & Mammana, 2021) e di comunicazioni a convegni (si veda, ad esempio, Gambini, & Capone, 2021). In collegamento con questo progetto sono nati anche sottogruppi nazionali, come il gruppo "*Klein Project in Italy*" aderente al gruppo internazionale *Klein Project* commissionato dall'IMU (International Mathematics Union) e dall'ICMI (International Commission of Mathematical Instruction). Il gruppo, coordinato da Ferdinando Arzarello e da Ornella Robutti dell'Università di Torino, ha come obiettivo la trasposizione didattica di vignette condivise a livello internazionale per la scuola secondaria di secondo grado; in questo contesto sono state condotte ricerche all'interno di attività del *Liceo Matematico* (Finzi Vita, Passaro, & Tovenà, 2022, Bencivenni et al., 2022 e Montone & Tomasi, 2022).

Le ricerche sopra citate mettono in luce l'impatto positivo del progetto *Liceo Matematico* nei processi di apprendimento e insegnamento della matematica. Questo studio si inserisce in tale filone e si propone come primo passo verso una valutazione più precisa dell'efficacia del progetto, mediante l'analisi dei dati raccolti in varie istituzioni scolastiche che aderiscono al progetto stesso.

2. L'uso dei dati INVALSI per l'indagine effettuata

Un buono strumento di riferimento nel contesto italiano per misurare i livelli di apprendimento raggiunti è fornito dalle analisi dei risultati delle prove INVALSI. In Italia, l'INVALSI (www.invalsi.it) è l'ente di ricerca che, tra le altre mansioni, effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni scolastiche. In particolare, la consistenza del quadro teorico delle prove INVALSI di matematica con le Indicazioni Curricolari Ministeriali (nello specifico, per il secondo ciclo con gli Assi Culturali, le Indicazioni Nazionali per i Licei e le Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali), così come anche il disegno delle rilevazioni e le modalità di restituzione dei dati (INVALSI, 2018), fanno sì che i dati di queste valutazioni forniscano informazioni utili e possano diventare strumenti interpretativi di alcuni aspetti dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, specifici del contesto italiano (Ferretti et al., 2023). Come messo in luce da (Gambini, Desimoni, & Ferretti, 2022), i dati INVALSI degli studenti in uscita dalla scuola secondaria di secondo grado sembrano avere un valore predittivo per la carriera universitaria, e hanno anche un potere discriminante più attendibile rispetto al voto dell'esame di Stato, la cui validità invece è stata spesso messa in discussione (si veda ad esempio Anzellotti & Mazzini, 2009). Del resto, per l'accesso ai corsi universitari le Università italiane non fanno riferimento all'esito dell'esame di Stato e adottano test d'ingresso specifici in linea con quanto previsto dal D.M. del 22 ottobre 2004, n. 270.

Ovviamente, lo studio dei risultati degli esiti degli studenti che frequentano il *Liceo Matematico* è viziato da alcuni fattori. In primo luogo, i percorsi del *Liceo Matematico* sono per lo più attivati, di fatto, presso scuole in cui sono presenti professori preparati, attivi e in contatto – spesso, in collaborazione - con gruppi di ricerca in didattica della matematica. Inoltre, gli studenti del *Liceo Matematico*, accettando di svolgere ore extra curriculari, sono curiosi e motivati, e, come mostrano dati informali raccolti, raggiungono generalmente alti livelli di apprendimenti in matematica. Obiettivo della presente indagine, quindi, non è solo rilevare il livello di apprendimenti in matematica degli studenti aderenti al progetto – dato oggettivo che comunque fornirebbe conferma di informazioni raccolte fino ad oggi solo in maniera informale - ma analizzare se e come il progetto del *Liceo Matematico* abbia un'effettiva ricaduta su questi apprendimenti. Lo studio si prefigge dunque un duplice obiettivo: la rilevazione degli apprendimenti raggiunti dagli studenti che partecipano al progetto *Liceo Matematico* mediante l'analisi dei risultati nelle prove INVALSI e la misurazione dell'impatto che la partecipazione al progetto ha negli apprendimenti rilevati. Come esamineremo in dettaglio nelle prossime sezioni, per raggiungere questo secondo obiettivo abbiamo intrapreso un'analisi longitudinale nel corso del tempo, confrontando l'andamento delle performance nell'apprendimento della matematica e dell'italiano tra gli studenti che partecipano al *Liceo Matematico* e gli studenti che non vi partecipano, all'interno delle medesime scuole. Inoltre, abbiamo allargato il confronto a livello nazionale, considerando i risultati degli studenti che hanno conseguito punteggi simili nei test INVALSI di matematica al termine della scuola secondaria di primo grado.

3. Gli obiettivi e il disegno sperimentale dell'indagine

La raccolta dei dati e la definizione del progetto sperimentale non sono state prive di ostacoli.

Innanzitutto, si sono presentati problemi dal punto di vista pratico. Per accedere ai dati INVALSI è necessaria l'adesione e la richiesta da parte dei Dirigenti Scolastici degli istituti superiori coinvolti. Abbiamo quindi ristretto la nostra indagine alle scuole delle regioni di alcuni dei ricercatori attivi in questa ricerca in modo da rendere più diretto il contatto con i Dirigenti Scolastici, snellire le adesioni per le richieste dei dati all'INVALSI e ottenere tutte le informazioni necessarie in un ragionevole lasso di tempo.

Inoltre, è sorto un problema organizzativo: in alcune scuole (circa 1/3 del totale) gli studenti che seguono il progetto *Liceo Matematico* non sono raccolti in un'unica sezione, ma in classi *trasversali*, formate da studenti di diverse classi ma dello stesso anno scolastico. In questi casi, l'orario è congegnato in maniera tale che gli studenti provenienti dalle diverse sezioni si possano ritrovare insieme per le ore extra-curricolari, in genere a fine mattinata o inizio pomeriggio. La partecipazione all'indagine delle scuole con tale organizzazione avrebbe reso estremamente laborioso lo studio, sia per quanto riguarda l'identificazione dei codici dei singoli studenti, sia perché la struttura di una classe trasversale è meno rigida e gli abbandoni del percorso non rappresentano un'eccezione.

Ci siamo quindi limitati ad analizzare solo i dati delle scuole con sezioni intere *dedicate* al progetto *Liceo Matematico*, escludendo pertanto le scuole con classi trasversali.

La difficoltà di raccolta longitudinale dei dati ha rappresentato un ulteriore ostacolo in quanto negli anni scolastici 2019-20 e 2020-21, a causa della pandemia, le prove INVALSI non sono state effettuate regolarmente.

In dettaglio, il metodo che abbiamo adottato per studiare l'*impatto* del progetto è stato il seguente: tenendo conto che ciascuno studente è identificato univocamente, in modo anonimo, dal suo codice SIDI INVALSI, abbiamo analizzato l'andamento degli apprendimenti a

partire dai punteggi ottenuti nelle prove INVALSI della scuola secondaria di primo grado, prima dell'inizio del percorso del *Liceo Matematico*, e nelle due prove INVALSI previste nella scuola secondaria di secondo grado.

Abbiamo così seguito ciascuno degli studenti esaminati in tre prove successive, che si riferiscono ai gradi 8, 10 e 13. Per i problemi già citati dovuti alla pandemia, ci siamo limitati ad analizzare una sola coorte di studenti, cioè gli studenti che hanno sostenuto

- nel 2017 le prove del Grado 8,
- nel 2019 le prove del Grado 10,
- nel 2022 le prove del Grado 13.

Abbiamo richiesto i dati INVALSI degli studenti delle scuole selezionate e poi abbiamo chiesto ai dirigenti scolastici la (fondamentale) informazione con cui integrare i dati INVALSI, circa l'adesione delle singole sezioni (poi riconducibili ai singoli studenti) al *Liceo Matematico*.

Per evitare distorsioni dovute al contesto socio-economico e ad altri fattori, abbiamo deciso di non considerare come termine di confronto i dati nazionali, ma quelli relativi agli studenti, delle stesse scuole, che frequentano le sezioni non aderenti al progetto e che pertanto costituiscono un riferimento attendibile. Si sottolinea che gli stessi insegnanti sono in genere impegnati sia nelle classi di *Liceo Matematico* sia in altre classi della stessa scuola; si può dunque ritenere che il rendimento nei due gruppi non sia direttamente riconducibile all'insegnante. Inoltre, nella maggioranza delle scuole considerate sono presenti varie proposte didattiche oltre al *Liceo Matematico*: anche alcune delle altre sezioni sono composte da studenti che decidono di seguire un percorso "speciale" (es. *Cambridge*) e, di conseguenza, anche in altre sezioni ci si può attendere un'autoselezione in entrata.

La nostra ricerca si propone quindi di rispondere alle seguenti domande:

- Gli apprendimenti in matematica degli studenti del *Liceo Matematico* sono in media migliori degli apprendimenti degli studenti delle stesse scuole che non partecipano al progetto?
- Gli apprendimenti degli studenti del *Liceo Matematico* migliorano sia nel passaggio dalla secondaria di I grado alla secondaria di II grado, sia nel corso della secondaria di II grado, rispetto agli apprendimenti degli studenti che non aderiscono al progetto?
- L'efficacia del *Liceo Matematico*, in termini di misura di quanto un processo formativo è in grado di incidere sulla valorizzazione e sul miglioramento delle situazioni di partenza, varia a seconda del genere o dell'abilità iniziale dello studente?

Come vedremo nelle sezioni successive, per rispondere alle domande di ricerca abbiamo preso in considerazione i risultati relativi alle prove INVALSI sia di matematica sia di italiano.

4. Caratteristiche dell'indagine

Il lavoro si basa su un'indagine di natura esplorativa e conoscitiva, in cui la popolazione di riferimento è costituita dall'insieme di tutti gli studenti delle scuole secondarie selezionate dal gruppo di ricerca che appartengono alla coorte di studenti che hanno svolto le prove INVALSI del grado 10 nel 2019 e del grado 13 nel 2022, per i quali fosse disponibile anche il dato sul risultato della prova di grado 8 del 2017.

Idealmente, la strategia di campionamento ottimale prevede un campionamento di tipo probabilistico dalla popolazione formata da tutti gli studenti del *Liceo Matematico*, eventualmente stratificato rispetto alle regioni (o altre unità territoriali di interesse). Per i motivi esposti nella precedente sezione, non è stato possibile seguire una

tale strategia. Inoltre, nonostante un tentativo di ricostruire un registro esaustivo, che è stato alla base del lavoro (Bernardi et al. 2022) in cui vengono descritti i risultati di un'indagine sugli insegnanti coinvolti nel *Liceo Matematico* su tutto il territorio nazionale, non è disponibile un elenco aggiornato delle scuole aderenti al *Liceo Matematico* anche perché la lista è in costante evoluzione.

Le considerazioni già esposte hanno condotto all'adozione di un campionamento ragionato (non probabilistico), in cui la selezione delle scuole è stata demandata a diversi membri del gruppo di ricerca impegnato nel presente lavoro. È chiaro che l'impossibilità di selezionare le unità con un meccanismo casuale impedirà la generalizzazione dei risultati ottenuti a livello di tutta la popolazione. Tuttavia, confidando nel fatto che si è cercato di evitare distorsioni, per quanto possibile, e di rispecchiare al meglio la variabilità della popolazione, compatibilmente con la possibilità di ottenere la collaborazione (imprescindibile) dei dirigenti, si ritiene che il campione esaminato consenta di ricostruire con buona approssimazione le caratteristiche della popolazione di riferimento. Inoltre, come già detto, sono state incluse nello studio tutte le sezioni delle scuole considerate nella specifica coorte di interesse, usando quindi come gruppo di controllo tutte le classi non aderenti al *Liceo Matematico* delle stesse scuole.

5. I dati disponibili

I due dataset messi a disposizione dall'INVALSI fanno riferimento alle prove effettuate dagli studenti appartenenti alle scuole selezionate, rispettivamente

- per il grado 10 nel 2019,
- per il grado 13 nel 2022.

In entrambi i casi vengono riportati i punteggi ottenuti dalla stessa coorte di studenti anche nella prova del grado 8 nel 2017.

Per ciascuno studente, identificato univocamente dal codice SIDI INVALSI, sono riportate informazioni relative a:

- caratteristiche anagrafiche (es.: genere, anno e luogo di nascita, età, titolo di studio e professione dei genitori);
- scuola di appartenenza (codice meccanografico, comune, provincia, regione);
- carriera dello studente (sezione, regolarità, punteggio ESCS *Economic, Social and Cultural Status*, voti scritti e orali in Italiano e in Matematica);
- punteggi WLE (stima delle abilità secondo il modello di Rasch, per approfondire si veda Warm, 1989) in Italiano e in Matematica e i corrispondenti livelli;
- risposte per ciascun quesito della prova INVALSI.

Questi dataset, che contengono i dati corrispondenti a tutti gli studenti della coorte considerata, sono stati integrati con l'informazione sulle sezioni del progetto *Licei Matematici*. Ciò ha consentito di etichettare ciascuno studente come appartenente / non appartenente ad una classe di *Liceo Matematico* (nel seguito verranno usate le rispettive abbreviazioni LM / NO-LM).

In una prima fase di pulizia, è stato effettuato un controllo di coerenza e completezza dei dati; alcuni record sono stati esclusi dall'analisi o per la mancata indicazione del punteggio del grado 8, o perché è stato registrato un cambio di sezione durante il percorso (passaggio da LM a NO-LM o viceversa).

È stato poi effettuato il *merge* dei due dataset conservando solo i record presenti in entrambi, in modo tale che il percorso di ciascuno studente risultasse completo.

A seguito di queste operazioni preliminari, si è ottenuto un dataset relativo a 2588 studenti appartenenti a 11 scuole in 5 differenti province italiane, come riportato nella seguente Tabella 1. La Tabella 2 riporta in dettaglio l'elenco delle scuole considerate con la provincia di appartenenza.

Provincia	Numero scuole	Numero studenti
Roma	5	1151
Catania	3	679
Caserta	1	319
Avellino	1	239
Latina	1	200
Totale	11	2588

Tabella 1. Ripartizione per provincia del collettivo di studenti e delle rispettive scuole.

Scuola	Città
Nomentano	Roma
Avogadro	Roma
Plinio Seniore	Roma
Azzarita	Roma
Peano	Monterotondo (RM)
Majorana-Arcoleo	Catania

Galilei	Catania
Capizzi	Bronte (CT)
Manzoni	Caserta
Mancini	Avellino
Grassi	Latina

Tabella 2. Dettaglio scuole e città di appartenenza.

6. Risultati

La Tabella 3 riporta le principali sintesi descrittive riguardo la distribuzione dei punteggi WLE ottenuti nelle prove di Italiano e Matematica per ciascuno dei tre gradi considerati, complessivamente per tutti gli studenti del campione ($N = 2588$).

È utile un confronto con le medie nazionali (si vedano i risultati presentati nei *Rapporti INVALSI* disponibili nel sito <https://www.invalsi.it/invalsi/istituto.php?page=rapporti>) riportate in Tabella 4. I punteggi medi ottenuti dagli studenti coinvolti nella presente indagine sono uniformemente superiori, come era lecito aspettarsi, soprattutto per quanto riguarda la matematica (si veda Sezione 1).

Punteggi	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	73,18	364,29	212,71	210,56	39,20
	10	54,52	322,80	216,74	216,06	35,44
	13	38,04	323,60	202,15	199,94	37,52
Matematica	8	53,98	365,01	215,43	214,17	41,67

	10	75,94	313,85	220,71	220,92	38,00
	13	73,46	311,73	208,56	208,41	40,23

Tabella 3. *Principali statistiche descrittive (minimo, massimo, mediana, media e deviazione standard, ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per tutti gli studenti analizzati (N = 2588).*

Punteggi	Grado	media	ds
Italiano	8	193,94	39,87
	10	200,67	39,86
	13	185,40	41,11
Matematica	8	196,69	40,58
	10	201,36	39,71
	13	190,98	39,33

Tabella 4. *Media e deviazione standard (ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, a livello nazionale (Fonte: Rapporti INVALSI disponibili alla pagina web <https://www.invalsi.it/invalsi/istituto.php?page=rapporti>)*

D'altra parte, per assicurare un confronto il più possibile equo e oggettivo, all'interno delle scuole selezionate, sono stati considerati e inclusi nell'analisi gli studenti di tutte le sezioni, che siano o meno aderenti al *Liceo Matematico*.

Sul totale di 2588 studenti,

- 2232 (86.2%) appartengono a sezioni che non hanno aderito al *Liceo Matematico*,
- 356 (13.8%) appartengono a sezioni che hanno aderito al *Liceo Matematico*.

Per ciascuno dei due sottogruppi le seguenti Tabelle 5 e 6 riportano statistiche descrittive.

Punteggi	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	73,18	364,29	211,81	210,26	39,10
	10	54,52	322,80	215,59	214,78	35,71
	13	38,04	323,60	200,03	198,07	37,64
Matematica	8	53,98	365,01	213,47	212,93	40,88
	10	75,94	313,85	216,83	218,46	37,50
	13	73,46	311,73	205,02	205,15	39,86

Tabella 5. *Principali statistiche descrittive della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per i soli studenti non aderenti al Liceo Matematico (N = 2232).*

Punteggi	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	81,00	352,04	215,72	212,44	39,82
	10	133,26	315,51	226,07	224,06	32,60
	13	96,71	288,33	213,80	211,65	34,63
Matematica	8	76,77	324,53	222,56	221,92	45,63
	10	113,73	313,85	236,80	236,39	37,49

	13	105,86	311,73	228,33	228,88	36,39
--	----	--------	--------	--------	--------	-------

Tabella 6. *Principali statistiche descrittive (minimo, massimo, mediana, media e deviazione standard, ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per i soli studenti aderenti al Liceo Matematico (N = 356).*

Per agevolare il confronto, le stesse informazioni vengono rappresentate graficamente mediante i grafici in Figura 1 che sintetizzano l'andamento dei punteggi medi nei tre gradi considerati.

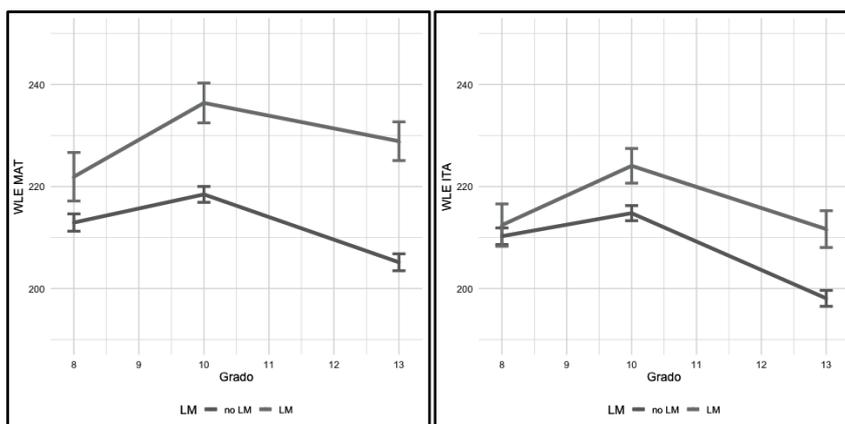


Figura 1 *Medie delle distribuzioni dei punteggi separatamente per Matematica (pannello a sinistra) e Italiano (pannello a destra) nei diversi gradi considerati, rispettivamente per gli studenti LM e NO-LM.*

In generale si nota che la distribuzione dei punteggi al grado 8, per i due sottogruppi di studenti LM e NO-LM, è sostanzialmente la stessa per le prove di Italiano, mentre i punteggi delle prove di Matematica in media tendono ad essere leggermente più elevati nel sottogruppo LM fin dal grado 8.

Nelle prove successive (grado 10 e 13) la differenza si fa più marcata: gli studenti LM totalizzano punteggi più elevati per ciascun grado e ciascuna materia, in particolare in matematica.

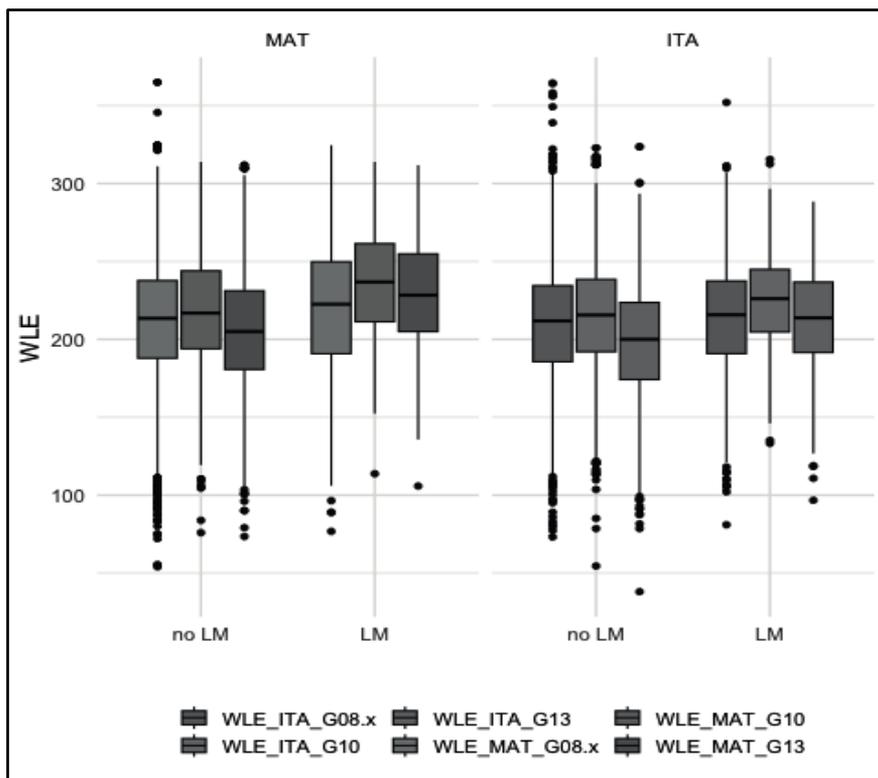


Figura 2. Boxplot della distribuzione dei punteggi separatamente per Matematica (pannello a sinistra) e Italiano (pannello a destra) nei diversi gradi considerati, rispettivamente per gli studenti NO-LM e LM.

La Figura 2 mostra i boxplot delle distribuzioni dei punteggi costruiti separatamente per Matematica e Italiano nei diversi gradi considerati, distinguendo i gruppi di studenti LM e NO-LM. In ciascun boxplot, la linea centrale rappresenta la mediana, i lati orizzontali delle “scatole” indicano rispettivamente il primo e il terzo quartile della distribuzione; infine, le osservazioni evidenziate con pallini neri evidenziano i valori che possono essere considerati anomali, che ovviamente occupano le posizioni estreme della distribuzione.

Inoltre, a supporto dell’ispezione grafica, sono stati effettuati gli opportuni test sulle differenze tra i punteggi dei due sottogruppi di studenti LM e NO-LM, per i diversi gradi e le diverse materie. I test adottati, sia parametrici (t test) sia non parametrici (Wilcoxon test), hanno restituito risultati tra loro coerenti con p -value tutti vicini allo zero (tranne che nel grado 8 nella prova di Italiano).

In Figura 2, in ciascun sottogruppo costituito da tre boxplot (corrispondenti ai tre gradi) è evidente un incremento nella distribuzione dei punteggi del grado 10, seguito da una flessione nel grado 13. In questo caso le differenze tra i punteggi corrispondenti ai gradi 8 e 10 e ai gradi 10 e 13 (testate tenendo conto dell’appaiamento tra le unità) risultano tutte significativamente diverse da 0. L’andamento è consistente con quello osservato a livello nazionale (si veda nuovamente la Tabella 4) ed è molto probabilmente imputabile all’effetto della pandemia. La pandemia ha infatti amplificato l’importanza della qualità dell’apprendimento durante il percorso scolastico, un problema preesistente che è stato enfatizzato dall’emergenza sanitaria (Ricci, 2021). Dai risultati delle prove INVALSI 2021 emergono chiaramente diversi problemi nei livelli di apprendimento degli studenti, con la pandemia che ha aggravato una situazione già critica evidenziando sia lacune nelle competenze dei diplomati (dispersione scolastica implicita) che la scarsa presenza di studenti eccellenti (high performers) in molteplici regioni e ambiti di studio

<https://www.invalsiopen.it/wp-content/uploads/2021/07/Presentazione-Roberto-Ricci-Responsabile-Area-Prove-INVALSI-Presentazione-Risultati-INVALSI-2021-1.pdf>

Come nelle analisi precedenti, l'informazione riguardo il punteggio ottenuto al grado 8 è utile come valore di riferimento per effettuare i confronti al netto del diverso livello dei singoli studenti prima dell'inizio del percorso di scuola secondaria di secondo grado. Più specificamente, sono state calcolate le variazioni tra i punteggi al grado 10 e al grado 13 entrambe rispetto al grado 8. Le differenze tra queste variazioni nei due sottogruppi LM e NO-LM sono risultate tutte significative. Ad esempio, per quanto riguarda la Matematica, in entrambi i sottogruppi si registra un incremento dei punteggi passando dal grado 8 al grado 10 (mediamente di 5,5 punti per i NO-LM e 14,5 punti per gli LM); di contro, per il grado 13 rispetto al grado 8 il gruppo LM ottiene ancora un incremento (con una media pari a 6,96) a fronte di un decremento per i NO-LM che in media fanno registrare punteggi inferiori di 7,8 punti. La situazione è analoga per l'Italiano nel passaggio dal grado 8 al grado 10, con un incremento medio di 4,5 per i NO-LM e di 11,6 per gli LM; anche in questo caso per i NO-LM i punteggi tendono a diminuire dal grado 8 al grado 13 (con un decremento medio di 12,2); è significativa la differenza rispetto alle variazioni per il gruppo LM in cui c'è una sostanziale stabilità (variazione non significativa tra grado 13 e grado 8).

7. Altre analisi

7.1 Differenze di genere nel miglioramento dovuto al Liceo Matematico

Uno dei punti di interesse di questa analisi è cercare di approfondire l'eventuale effetto del *genere* sulle differenze riscontrate tra i due sottogruppi LM e NO-LM.

In Tabella 7 viene riportata la distribuzione doppia per genere e adesione al progetto *Liceo Matematico*. Nel collettivo di riferimento la proporzione di maschi (51.7%) è leggermente superiore rispetto a quella delle femmine (48.3%); la situazione è bilanciata all'interno del sottogruppo NO-LM (50% vs 50%). Tuttavia, limitando l'attenzione al solo sottogruppo *Liceo Matematico*, si nota una prevalenza dei maschi (62.1%) rispetto alle femmine (37.9%). In pratica l'associazione tra genere e adesione risulta significativa (Chi-quadro = 17.674, $p\text{-value} \approx 0$) e i maschi sembrerebbero dunque più propensi ad aderire al progetto del *Liceo Matematico*. In realtà, questo dato è piuttosto in linea con la proporzione di maschi frequentanti i licei scientifici, come si riscontra dai dati resi disponibili dal Ministero dell'Istruzione e del Merito, <https://dati.istruzione.it/>. Ad esempio, in entrambi gli anni scolastici 2018-19 e 2020-21 la percentuale di studenti iscritti al liceo scientifico di genere maschile era del 57% a fronte del 43% di genere femminile.

Genere	NO-LM	LM	Totale
Maschio	1118	221	1339
Femmina	1114	135	1249
Totale	2232	356	2588

Tabella 7: Distribuzione doppia per genere e adesione al progetto Licei Matematici

I grafici in Figura 3 sintetizzano l'andamento medio dei punteggi nell'arco temporale delle tre prove per ciascuna materia e per ciascun genere, separatamente per maschi e femmine. Le considerazioni emerse dall'analisi riferita all'intero collettivo sembrano confermate anche dopo la stratificazione per genere. In particolare, sia per i maschi sia per le femmine non è significativa la differenza iniziale (grado 8) nel punteggio di Italiano ottenuto dagli studenti LM e NO-

LM; tra le femmine anche in Matematica la differenza non è sensibile, mentre tutti gli altri confronti fanno registrare punteggi più elevati per gli studenti del *Liceo Matematico*.¹

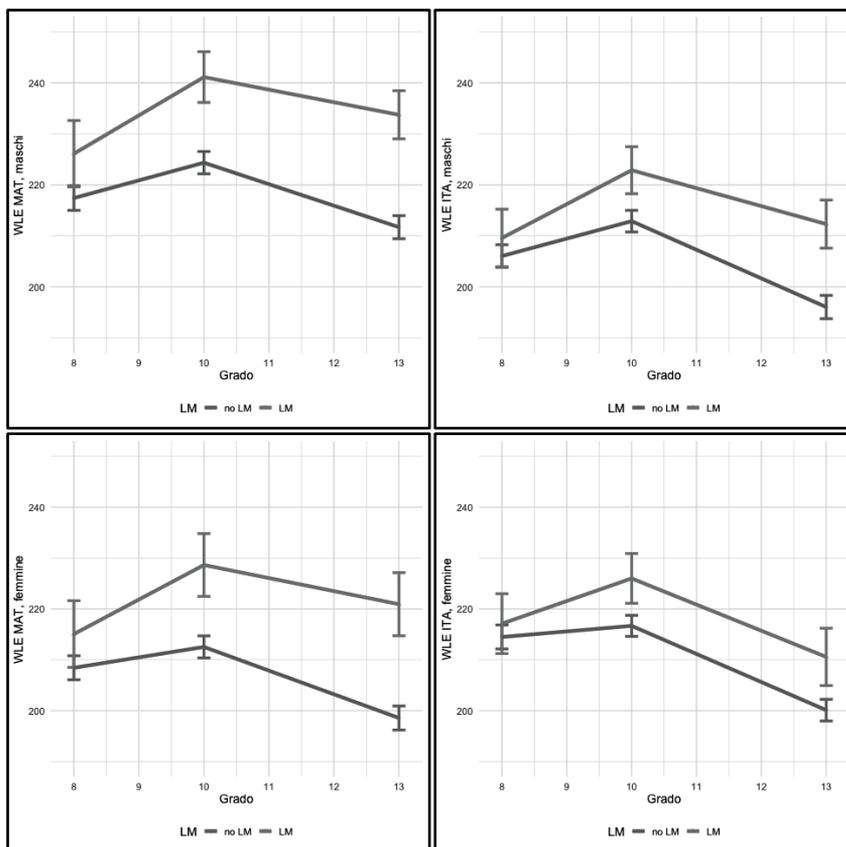


Figura 3 Medie delle distribuzioni dei punteggi separatamente per Matematica (pannelli a sinistra) e Italiano (pannelli a destra) nei diversi gradi considerati, rispettivamente per gli studenti LM e NO-LM, di genere maschile e femminile.

¹ I risultati precedenti trovano conferma anche tenendo conto simultaneamente delle altre variabili, all'interno di modelli di regressione lineare multipla.

7.2 Effetto del Liceo Matematico sugli studenti con livelli di abilità più bassi

Infine, poniamo attenzione al gruppo degli studenti che in partenza (grado 8) sono risultati più in difficoltà. In particolare, abbiamo identificato il sottogruppo degli studenti che hanno riportato al grado 8 un punteggio inferiore al primo quartile della distribuzione sia in matematica sia in italiano.

Nel collettivo in esame sono stati individuati complessivamente 325 studenti, di cui 44 partecipanti al LM e i restanti 281 appartenenti a sezioni non LM.

Al di là delle limitazioni dovute ai numeri relativamente esigui, è interessante notare dall'analisi dei grafici di Figura 4 e dalle statistiche riportate nelle Tabelle 8 e 9, che anche per gli studenti apparentemente più svantaggiati in partenza si è rilevato un miglioramento sensibile nei punteggi di entrambe le materie, al quale l'adesione al *Liceo Matematico* sembra aver contribuito. Nel caso della Matematica, addirittura nel grado 13 la media dei punteggi rimane stabile, in controtendenza rispetto a quanto osservato sul collettivo nel suo complesso.

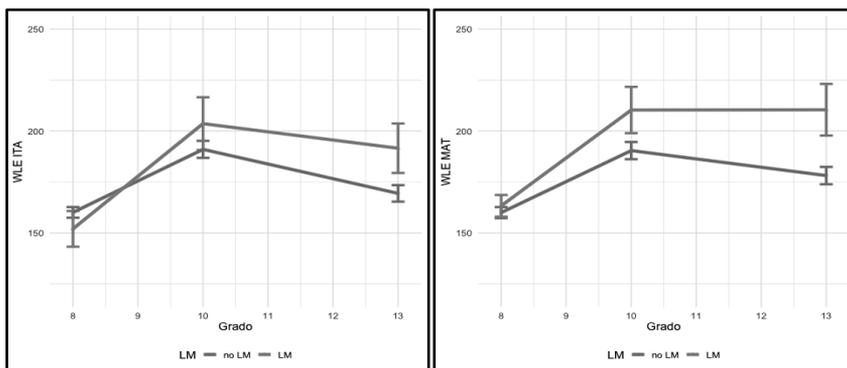


Figura 4 Medie delle distribuzioni dei punteggi separatamente per Matematica (pannello a sinistra) e Italiano (pannello a destra) nei diversi gradi considerati, rispettivamente per gli studenti LM e NO- LM, per il sottogruppo degli studenti considerato ($N = 325$).

Punteggi	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	81	185,2	160,2	152	28,8
	10	133,3	290,6	201,5	203,6	42,5
	13	126,8	276,7	193,3	191,5	39,8
Matematica	8	122,8	187,9	167,9	167,9	17,5
	10	113,7	313,8	208,7	210,3	37,3
	13	135,7	288,4	203,0	210,4	41,6

Tabella 8. Principali statistiche descrittive (minimo, massimo, mediana, media e deviazione standard, ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per i soli studenti **aderenti al Liceo Matematico** ($N = 44$).

Punteggi	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	81,3	186,6	166,8	160,1	22,3
	10	54,5	290,8	190,7	191,0	35,5
	13	38,0	287,8	168,2	169,4	34,5
Matematica	8	91,4	187,9	165,0	160,0	23,2
	10	83,8	308,8	188,2	190,4	35,9
	13	73,5	298,5	180,8	178,1	36,3

Tabella 9. *Principali statistiche descrittive (minimo, massimo, mediana, media e deviazione standard, ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per i soli studenti **non aderenti al Liceo Matematico** ($N = 281$).*

8. Commenti finali

In questo contributo si è presentato uno studio volto ad indagare i livelli degli apprendimenti raggiunti dagli studenti aderenti al progetto nazionale *Liceo Matematico* in riferimento a diversi parametri.

Innanzitutto, con una strategia di campionamento ragionato è stato selezionato un campione di 2588 studenti aderenti al Progetto del *Liceo Matematico* che hanno concluso un ciclo intero del percorso e di cui era possibile ricavare i dati delle prove INVALSI di grado 8, grado 10 e grado 13 e sono stati analizzati i dati ottenuti in queste prove sotto diversi punti di vista.

Come mostrato in Tabella 6, le statistiche descrittive della distribuzione dei punteggi delle prove INVALSI di Matematica e di Italiano evidenziano come gli studenti aderenti al progetto *Liceo Matematico* ottengano punteggi uniformemente superiori alla media

italiana in tutti i gradi scolastici indagati. Queste analisi confermano con dati oggettivi delle aspettative informali per quanto riguarda la matematica e forniscono informazioni rilevanti anche per quanto riguarda l'italiano.

Il dato più rilevante di questa indagine è indubbiamente lo studio degli andamenti degli apprendimenti degli studenti nel corso degli anni, distinguendo gli studenti aderenti al progetto *Liceo Matematico* LM e quelli non aderenti NO-LM. Come si evince dai grafici e dalle tabelle, la distribuzione dei punteggi al grado 8 per i due sottogruppi di studenti è sostanzialmente la stessa per le prove di Italiano e c'è una lieve differenza a favore degli studenti LM per quanto riguarda la Matematica. La situazione esplose nei punteggi ottenuti nelle prove successive: in entrambe le materie gli studenti LM totalizzano punteggi più elevati e le distanze tra i punteggi ottenuti dai due gruppi di studenti sono tutte significative da un punto di vista statistico. Come mostrato in tabella 7 e in figura 3, i dati sono confermati anche dopo la stratificazione per genere. Analizzando i dati in riferimento agli studenti che hanno ottenuto nelle prove INVALSI di grado 8 un punteggio inferiore al primo quartile della distribuzione sia in Matematica sia in Italiano (figura 4, tabelle 8 e 9), vediamo che le differenze tra i punteggi ottenuti nelle prove dei gradi successivi sono ancora più marcate. L'adesione al progetto *Liceo Matematico* sembra quindi aver contribuito in modo ancor più significativo per gli studenti più svantaggiati in partenza.

I dati di questo primo studio esplorativo sembrano rispondere positivamente alle nostre domande di ricerca e sembrano dunque indicare che l'adesione al progetto *Liceo Matematico* incida positivamente sul livello degli apprendimenti raggiunti sia in matematica sia in italiano, e in modo più marcato per gli studenti che ottengono punteggi bassi in entrambe le materie in uscita dal primo ciclo.

Questi dati, particolarmente incoraggianti, oltre a confermare riscontri informali dei numerosi studenti e insegnanti aderenti al

progetto, aprono a nuove piste d'indagine future che coinvolgeranno un campione più ampio di scuole.

3. Riferimenti bibliografici e in rete

Anzellotti, G., & Mazzini, F. (2009). Differenze territoriali nei risultati di eccellenza in matematica nella scuola secondaria superiore e all'ingresso dell'università. *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Serie 1, 2(1), 157–179.

Bencivenni, I., Bernardi, L., Ferretti, F., & Tomasi, L. (2022). Fregi e tassellazioni del piano per guardare la realtà che ci circonda con occhio matematico. *Atti del X convegno Di.Fi.Ma. (Didattica della Fisica e della Matematica) - Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza*. Torino.

Bernardi, C., Gambini, A., Gubbiotti, S., & Passaro, D. (2022). Indagine nazionale sui Licei Matematici. Analisi dell'esperienza sul campo dei docenti coinvolti, primi bilanci e potenziali sviluppi. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 7(1), 69-85.

Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F.S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 2(3), 293-304.

Cirmi, G.R., D'Asero, S., & Mammana, M.F. (2021). La Lingua Matematica: un'esperienza didattica nel Liceo Matematico. *Didattica della Matematica. Dalla Ricerca alle Pratiche d'aula*, (9), 127 – 138.

Ferretti, F., Bolondi, G., Gambini, A., Giberti, C., Lemmo, A., Martignone, F., & Spagnolo, C. (2023). Valutazioni su larga scala e ricerche in didattica della matematica: esempi di studi condotti in Italia. https://www.airdm.org/wp-content/uploads/2023/Seminario%20Nazionale/Ferretti_et_al_SemNaz2023_Def.pdf

Finzi Vita, S., Passaro, D., & Tovenà, F. (2022). Matrici e immagini digitali con Python: dall'algebra matriciale al trattamento di immagini. Una proposta del Progetto Klein Italia, *Archimede*, LXXIV(1), 39-48.

Gambini, A., & Capone, R. (2021). The Results of Large-scale Assessment as Tools for Mathematics Activity Design, *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education*.

Gambini, A., Desimoni, M., & Ferretti, F. (2022). Predictive tools for university performance: an explorative study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-27.

INVALSI (2018). Quadro di riferimento delle prove di INVALSI di matematica. https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf

INVALSI (2021). Le rilevazioni degli apprendimenti a.s. 2020-21.

https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2021/Rilevazioni_Nazionali/Rapporto/14_07_2021/Sintesi_Primi_Risultati_Prove_INVALSI_2021.pdf

Minello R. (2012). Educational Effectiveness Research e politiche educative. L'evoluzione del quadro teorico, *Formazione & Insegnamento* X-2-2012.

Montone, A., & Tomasi, L. (2022). La trasposizione didattica della vignetta "isometrie passo passo": progetto Klein Italia. Atti del *X convegno Di.Fi.Ma. (Didattica della Fisica e della Matematica) - Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza*. Torino.

Ricci, R. (2021). Gli apprendimenti ai tempi della pandemia. *RicercaAzione*, 13(2), 29-55.

Rogora, E., & Tortoriello F.S. (2018). Matematica e cultura umanistica. *LXX*(2), 82-88, *Archimede*, Firenze.

Rogora, E. & Tortoriello F.S., (2021). Interdisciplinarity for learning/teaching mathematics. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 35(70).

Tortoriello, F.S. (2021). Il liceo matematico: un esempio di scuola globale. “*Quaderni di Ricerca in Didattica*” n. 4, G.R.I.M. 73.

Warm, T.A. (1989). Weighted likelihood estimation of ability in item response theory. *Psychometrika* 54, 427–450.

<https://doi.org/10.1007/BF02294627>