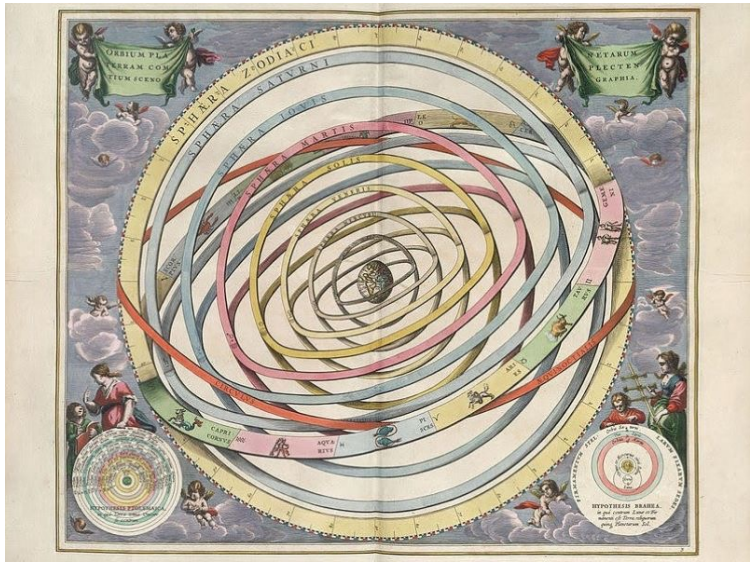


Andreas Cellarius: Harmonia Macrocosmica seu atlas universalis et novus, totius universi creati cosmographiam generalem, et novam exhibens, Tav. 3 (1660).

Workshop Matematica e Latino
nella Scuola secondaria di secondo grado
II edizione – Roma, 4-5 aprile 2025

Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Matematica
Dipartimento di Fisica

Armonie del Mondo

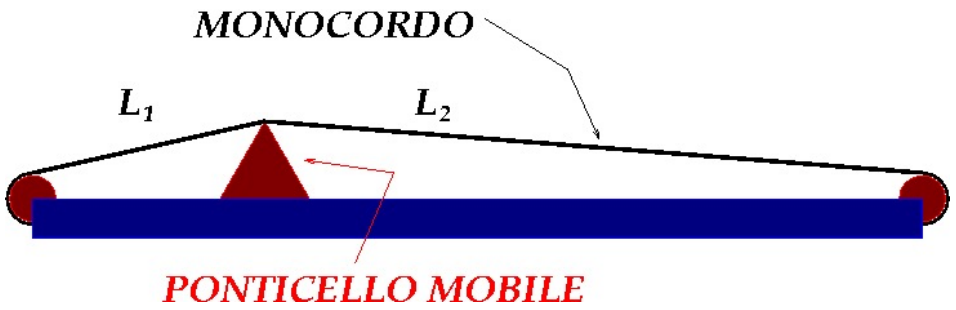
– da Pitagora a Schrödinger –

Sergio Caprara

Dipartimento di Fisica
Sapienza
Università di Roma

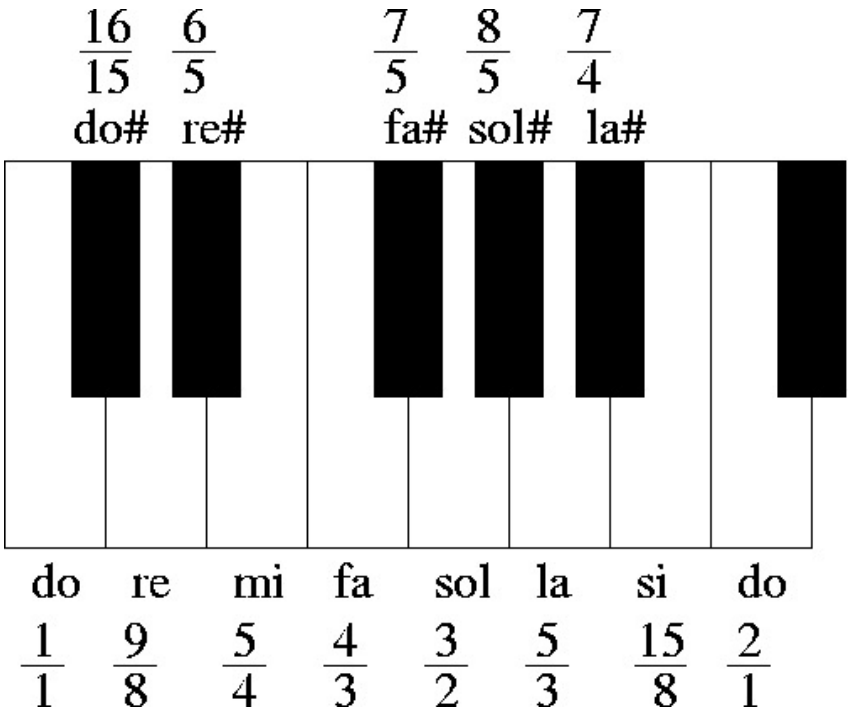
Pitagora di Samo (570-490 a.C.)

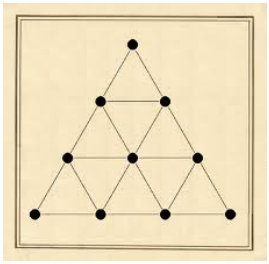
Raffaello Sanzio – Scuola di Atene
(part. – ca. 1510)



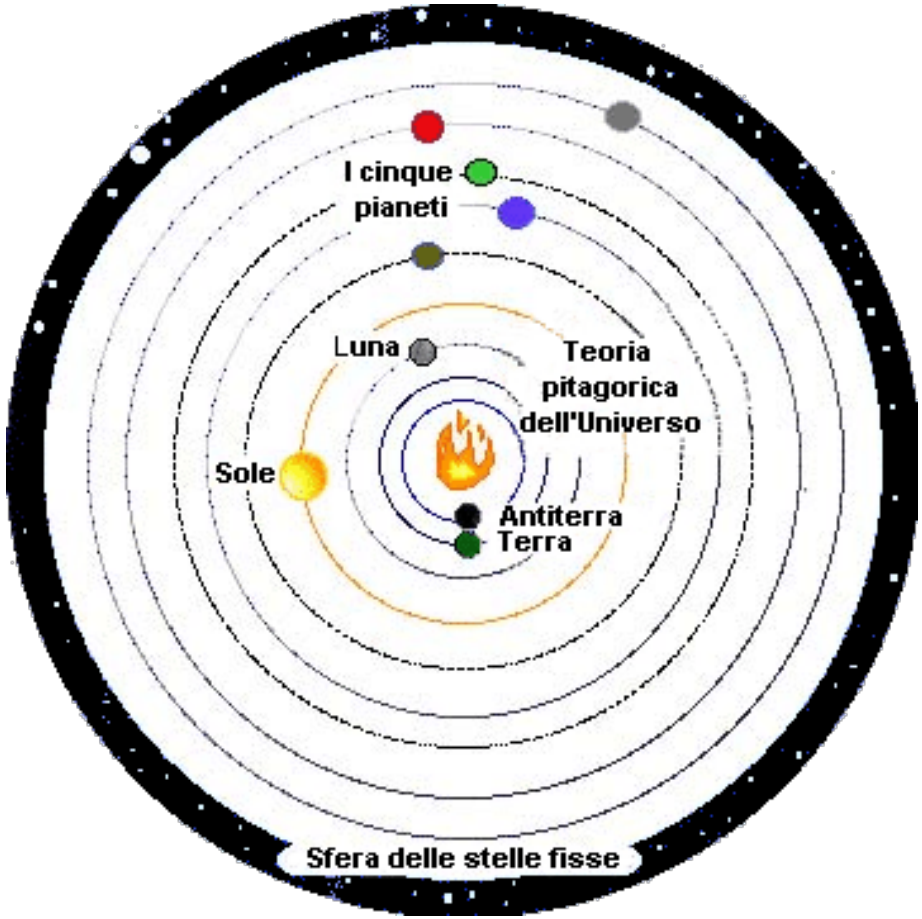
La *scienza degli armonici* consisteva nel generare tre numeri in una certa proporzione *ascoltando* poi su uno strumento appositamente ideato, il *monocordo*, il suono risultante dalla divisione della corda in due parti che rispettassero la proporzione assegnata. Pitagora osservò che i suoni gradevoli (le *armonie*) corrispondevano a rapporti semplici e costruì una *scala musicale*.

Rapporti razionali tra L_1 e L_2





Cosmologia pitagorica



- I pianeti si muovono su sfere (forma perfetta).
- I raggi delle sfere stanno fra loro in rapporti razionali (come quelli della scala del monocordo).
- Ad ogni pianeta è associata una nota e, nel muoversi, il pianeta emette un suono.
- 1+2+3+4=10 Tètraktys (numero sacro; dieci opposizioni fondamentali).

Dall'astronomia geocentrica all'astronomia eliocentrica

Aristotele (ca. 384 a.C.–322 a.C.)

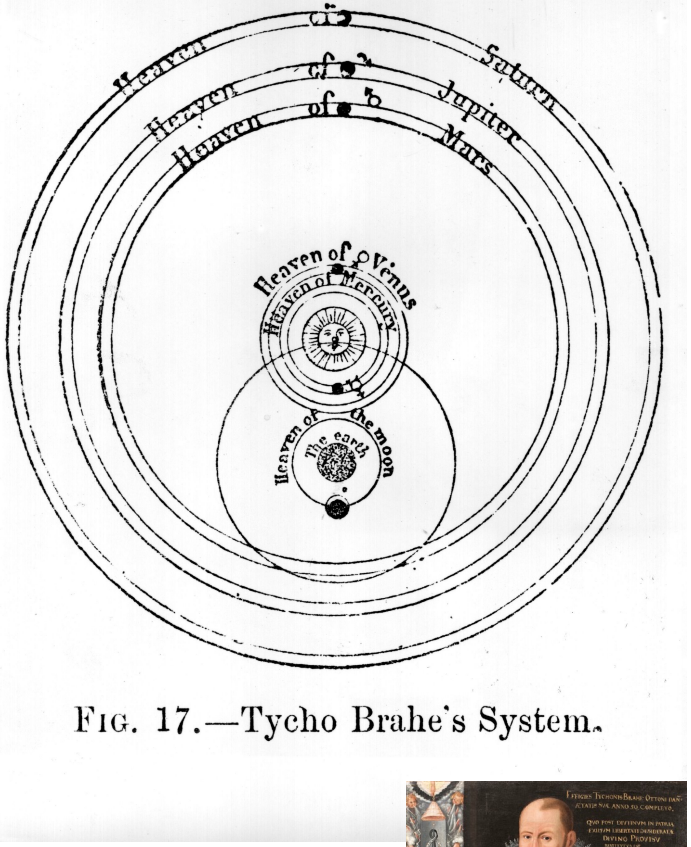
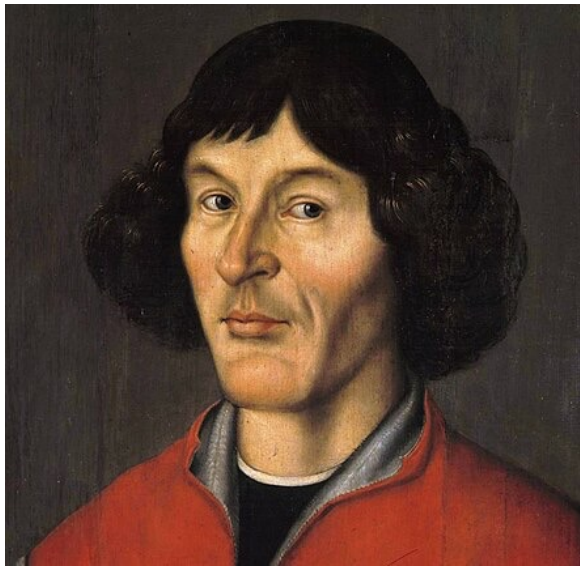


FIG. 17.—Tycho Brahe's System.

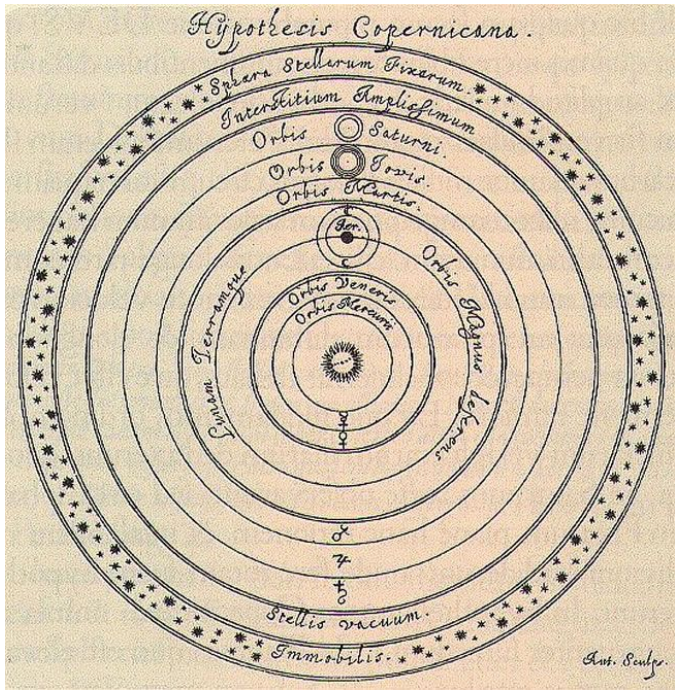
Claudio Tolomeo (ca. 100 d.C.–168 d.C.)

Tycho Brahe (1546–1601)

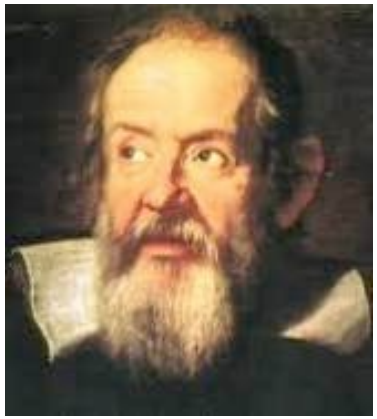


Niccolò Copernico (1473-1543)

Proinde non pudet nos fateri hoc totum, quod Luna praecingit, ac centrum Terrae, per orbem illum magnum inter caeteras errantes stellas annua revolutione circa Solem transire, et circa ipsum esse centrum mundi; quo etiam Sole immobili permanente, quicquid de motu Solis apparet, hoc potius in mobilitate Terrae verificari:tantam vero esse mundi magnitudinem, ut cum illa Terra a Sole distantia ad quoslibet alios orbes errantium syderum magnitudinem habeat pro ratione illarum amplitudinum satis evidentem, ad non errantium stellarum spheram collata, non appareat: quod facilius concedendum puto quam in infinitam poene orbium mutitudinem distrahi intellectum, quod coacti sunt facere, qui Terram in medio mundi detinuerunt.



>> De rivolutionibus orbium coelestium (1543)



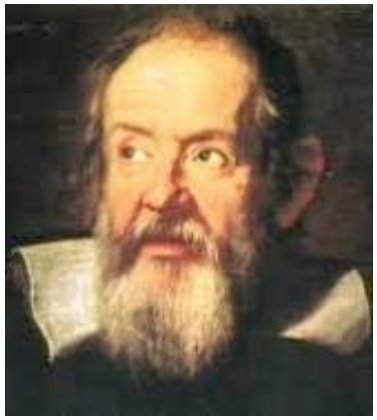
Galileo Galilei
(1564-1642)

Die decimatertia primum a me quatuor conspectæ fuerunt Stellulæ in hac ad Iovem constitutione:

Ori. * O * * * Occ.

erant tres occidentales et una orientalis: lineam proxime rectam constituebant; media enim occidentalium paululum a recta septentrionem versus deflectebat. Aberat orientalior a Iove minuta duo: reliquarum et Iovis intercapedines erant singulae unius tantum minuti. Stellæ omnes eandem præ se ferebant magnitudinem, ac, licet exiguam, lucidissimæ tamen erant ac fixis eiusdem magnitudinis longe splendidiores.

>> Sidereus Nuncius (1610)



Galileo Galilei
(1564-1642)

Gli anagrammi di Galileo

>> Lettera a Belisario Vinta (1610)

smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras

Soluzione di Keplero: *Salve umbistineum geminatum Martia proles*

cioè *Salve doppia sporgente prole di Marte*, ma Galileo intendeva:

Altissimum planetam tergeminum observavi.

>> Lettera a Giuliano de' Medici (1610)

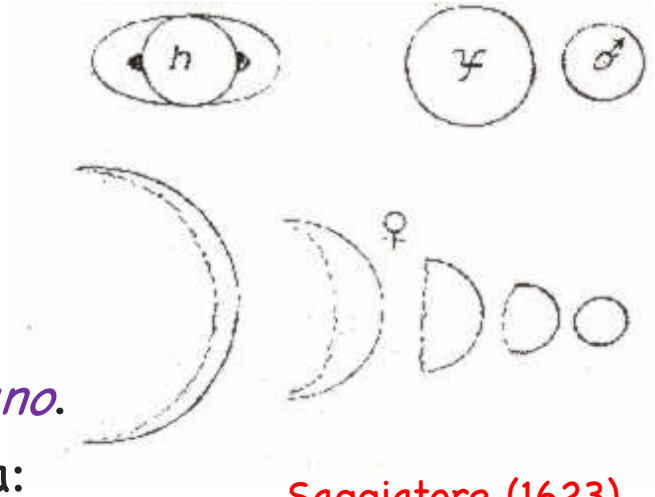
Haec immatura a me iam frustra leguntur oy

che, letteralmente si traduceva in

Queste cose immature sono da me raccolte invano.

Il vero significato, rivelato alcuni mesi dopo, era:

Cynthiae figuras aemulatur mater amorum



Saggiatore (1623)

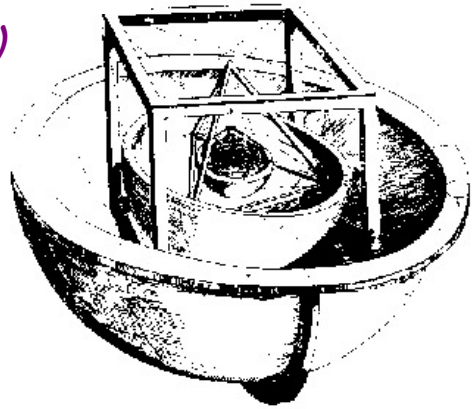
Le Armonie del Mondo

Johannes Kepler (1571–1630)

Verum age vel tandem experiamur, vtrum inter orbes Copernici sint istæ corporum proportiones. Ac initio rem crassiuscule censeamus. Maxima distantiarum differentia in Copernico est inter Iouem & Martem: Vt vides in explicatione hypothesium Tab. 1. & infra cap. 14. & 15. Martis enim distantia à Sole non æquat tertiam partem Iouiæ. Quæratur igitur corpus, quod maximam facit differentiam inter orbem circũscriptum & inscriptum (6) (concedatur nobis hæc καθ' ἕξιν cauum pro solido censendi) quod est Tetraedrum siue Pyramis. Est igitur inter Iouem & Martem Pyramis. Post hos maximam faciunt differentiam distantiæ Iupiter & Saturnus. Huius enim ille paulo plus dimidium æquat. Similis apparet in cubi intimo & extimo orbe differentia. Cubum igitur Saturnus ambit, cubus Iouem.

Æqualis fere proportio est inter Venerem & Mercurium, nec absimilis inter orbes Octaedri. Venus igitur hoc corpus ambit, Mercurius induit.

>> Mysterium Cosmographicum (1596)



raggi di Keplero e

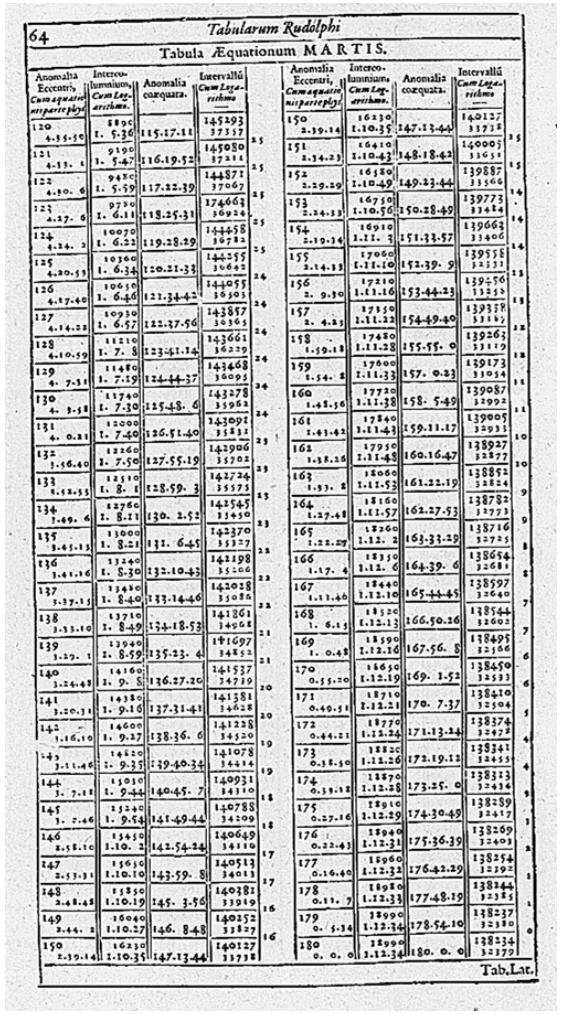
circonferenze osservate:

$R_{Saturno} = \sqrt{3}/2$ $\quad R_{Giove} = 1/2$

$\Rightarrow R_{Saturno}/R_{Giove} = \sqrt{3} \approx 1.732$

$C_{Saturno} = 56.47$ au $\quad C_{Giove} = 32.67$ au

$\Rightarrow C_{Saturno}/C_{Giove} \approx 1.728$ differenza 2‰ !!!



64 Tabularum Rudolphi

Tabula Æquationum MARTIS.

Anomalia Eccentri, Cum æquatore in parte plus	Intercolumnium, Cum Logarithmo.	Anomalia coæquata.	Intervallũ Cum Logarithmo
120 4.55.56	8895 1. 5.36	115.17.11	145093 37737
121 4.13. 1	9190 1. 5.47	116.19.52	145080 37211
122 4.30. 6	9480 1. 5.59	117.22.39	144877 37067
123 4.47. 6	9730 1. 6.11	118.25.31	144668 36924
124 5.04. 2	10070 1. 6.22	119.28.29	144458 36782
125 5.20.53	10360 1. 6.34	120.31.33	144255 36642
126 5.37.40	10610 1. 6.46	121.34.42	144055 36503
127 5.54.22	10930 1. 6.57	122.37.56	143887 36365
128 6.10.59	11210 1. 7. 8	123.41.14	143661 36229
129 6. 7.31	11480 1. 7.19	124.44.37	143468 36095
130 6. 3.58	11740 1. 7.30	125.48. 6	143278 35962
131 6. 0.21	12000 1. 7.40	126.51.40	143091 35831
132 5.56.40	12260 1. 7.50	127.55.19	142906 35702
133 5.52.55	12510 1. 8. 1	128.59. 3	142724 35573
134 5.49. 6	12760 1. 8.11	130. 2.52	142545 35450
135 5.45.13	13000 1. 8.21	131. 6.45	142370 35327
136 5.41.16	13240 1. 8.30	132.10.43	142198 35206
137 5.37.15	13480 1. 8.40	133.14.46	142028 35086
138 5.33.10	13710 1. 8.49	134.18.53	141861 34968
139 5.29. 1	13940 1. 8.59	135.23. 4	141697 34852
140 5.24.48	14160 1. 9. 8	136.27.20	141537 34739
141 5.20.31	14380 1. 9.16	137.31.41	141381 34628
142 5.16.10	14600 1. 9.27	138.36. 6	141228 34520
143 5.11.46	14820 1. 9.35	139.40.34	141078 34414
144 5. 7.18	15030 1. 9.44	140.45. 7	140931 34310
145 5. 2.46	15240 1. 9.54	141.49.44	140788 34209
146 4.58.10	15450 1.10. 2	142.54.24	140649 34110
147 4.53.31	15650 1.10.10	143.59. 8	140513 34013
148 4.48.48	15850 1.10.19	145. 3.56	140381 33919
149 4.44. 2	16040 1.10.27	146. 8.48	140252 33827
150 4.39.14	16230 1.10.35	147.13.44	140127 33738

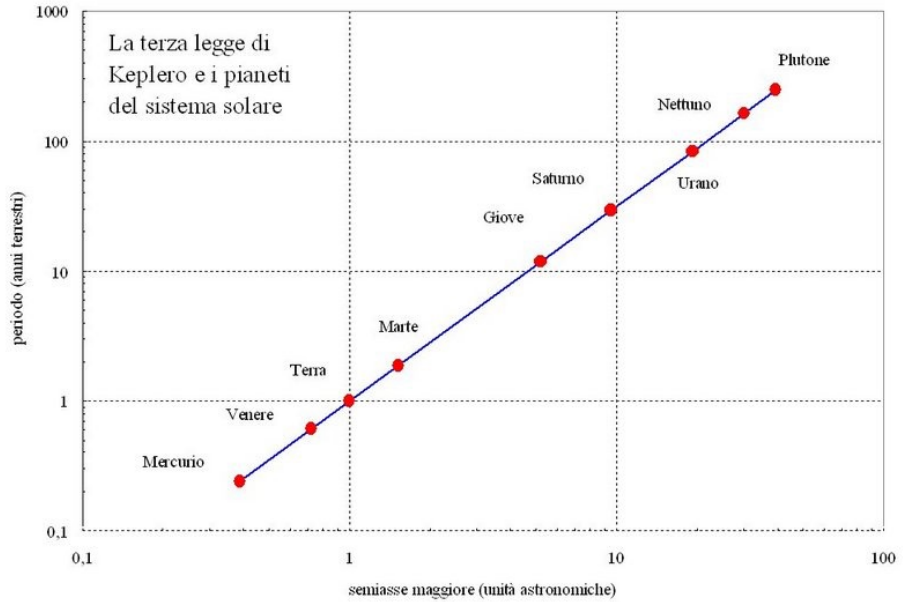
Anomalia Eccentri, Cum æquatore in parte plus	Intercolumnium, Cum Logarithmo.	Anomalia coæquata.	Intervallũ Cum Logarithmo
150 4.39.14	16230 1.10.35	147.13.44	140127 33738
151 4.34.23	16410 1.10.43	148.18.42	140005 33651
152 4.29.29	16580 1.10.49	149.23.44	139887 33566
153 4.24.33	16750 1.10.56	150.28.49	139773 33484
154 4.19.34	16910 1.11. 3	151.33.57	139663 33406
155 4.14.33	17060 1.11.10	152.39. 9	139558 33331
156 4. 9.30	17210 1.11.16	153.44.23	139456 33253
157 4. 4.25	17350 1.11.22	154.49.40	139358 33183
158 3.59.18	17480 1.11.28	155.55. 0	139263 33119
159 3.54. 8	17600 1.11.33	157. 0.23	139173 33054
160 3.48.56	17720 1.11.38	158. 5.49	139087 32992
161 3.43.42	17840 1.11.43	159.11.17	139005 32931
162 3.38.26	17950 1.11.48	160.16.47	138927 32877
163 3.33. 8	18060 1.11.53	161.22.19	138852 32824
164 3.27.48	18160 1.11.57	162.27.53	138782 32773
165 3.22.27	18260 1.12. 2	163.33.29	138716 32725
166 3.17. 4	18350 1.12. 6	164.39. 6	138654 32681
167 3.11.40	18440 1.12.10	165.44.45	138597 32640
168 3. 6.15	18520 1.12.13	166.50.26	138544 32602
169 3. 0.48	18590 1.12.16	167.56. 8	138495 32566
170 2.55.20	18650 1.12.19	169. 1.52	138450 32533
171 2.49.51	18710 1.12.21	170. 7.37	138410 32504
172 2.44.21	18770 1.12.24	171.13.24	138374 32472
173 2.38.50	18820 1.12.26	172.19.12	138341 32453
174 2.33.18	18870 1.12.28	173.25. 0	138313 32434
175 2.27.46	18910 1.12.29	174.30.49	138289 32417
176 2.22.13	18940 1.12.31	175.36.39	138269 32403
177 2.16.40	18960 1.12.32	176.42.29	138254 32392
178 2.11. 7	18980 1.12.33	177.48.19	138244 32385
179 2. 5.34	18990 1.12.34	178.54.10	138237 32380
180 0. 0. 0	18990 1.12.34	180. 0. 0	138234 32379

Tab. Lat.

Terza legge di Keplero

… eaque si temporis articulos petis, 8 Mart. hujus anni millesimi sexcentesimi decimi octavi animo concepta, sed infœliciter ad calculos vocata, eoque pro falsa rejecta, denique 15 Maji reversa, novo capto impetu, expugnavit Mentis meæ tenebras tanta comprobatione & laboris mei septendecennalis in Observationibus **Braheanis**. & meditationis hujus in unum conspirantium; ut somniare me, & præsumere quæsitum inter principia, primo crederem. Sed res est certissima exactissimaque quod proportio qua est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit præcise **sesquialtera proportionis** mediarum distantiarum …

>> Libro V - Harmonice mundi (1619)



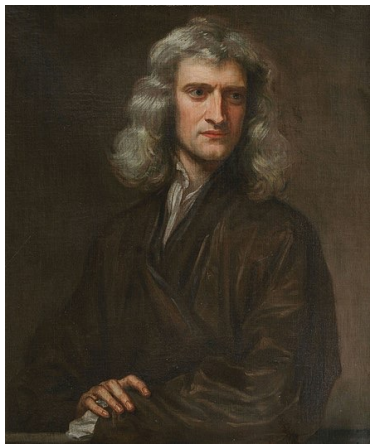
Isaac Newton (1642-1726)
la gravitazione universale

Prop. II. Theor. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

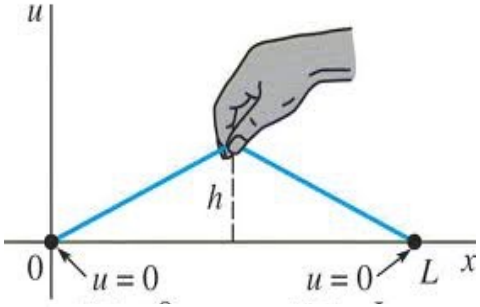
Corpora omnia in Planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantiis a centro Planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis



Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheses non fingo.

>> Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687)

J. B. J. Fourier (1768-1830)
le onde e il calore



per $x=0$ e per $x=L$

corda pizzicata

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

$$u(x,t) = C\sin(kx)\cos(\omega t)$$

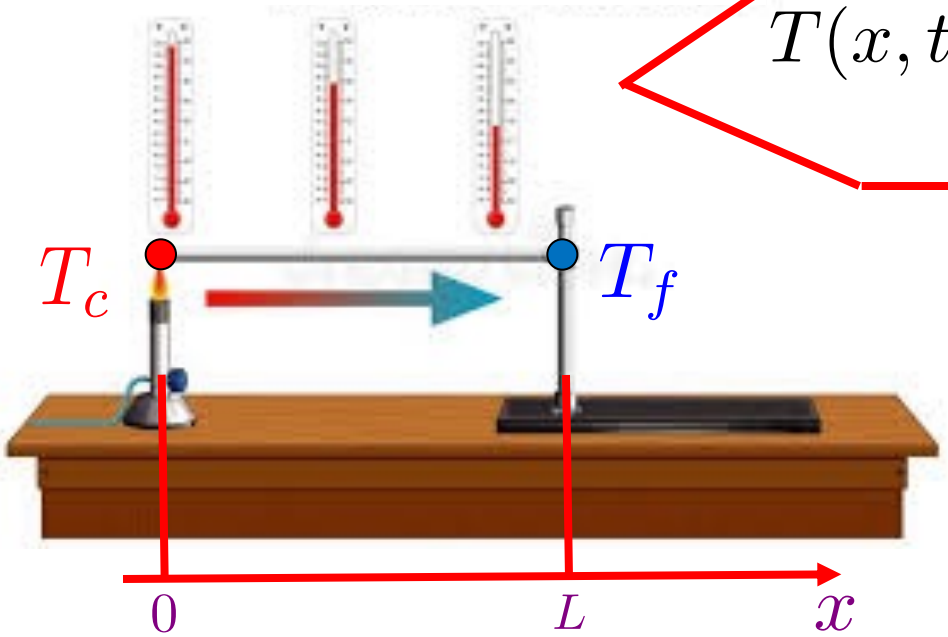
$$\omega = vk$$

conduzione del calore

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)$$

$$T(x,t) = T_\infty(x) + C\,\mathrm{e}^{-\Gamma t}\sin(kx)$$

$$\Gamma = \kappa\,k^2$$



stato stazionario

$$T_\infty(x) = T_c + \frac{T_f - T_c}{L}x$$

funzione armonica

E. Schrödinger (1887-1961), la meccanica quantistica e la funzione d'onda

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

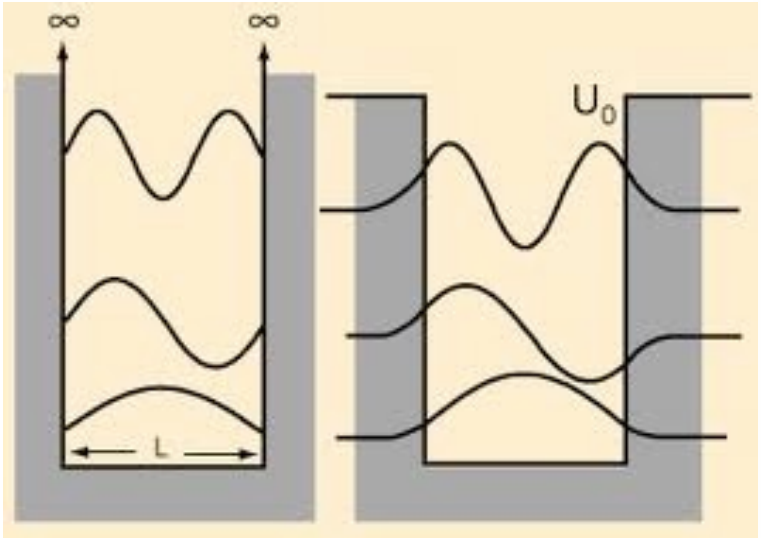
costante di Planck

funzione d'onda

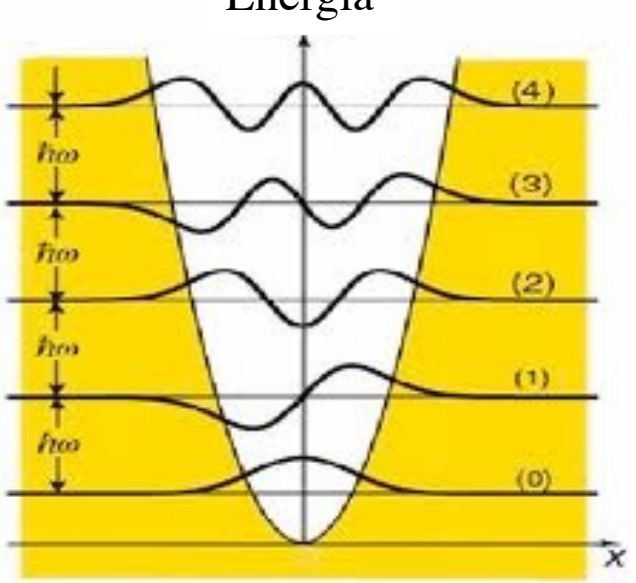
massa

en. potenziale

Buca rettangolare



Oscillatore armonico



Considerazioni conclusive

- Per i pitagorici la realtà si conforma alla matematica.
- La filosofia pitagorica esercita una forte influenza sul pensiero scientifico.
- Gradualmente, la matematica diventa lo strumento per descrivere le regolarità dei fenomeni naturali.
- L'analisi armonica è un esempio della possibilità di svelare regolarità nascoste.