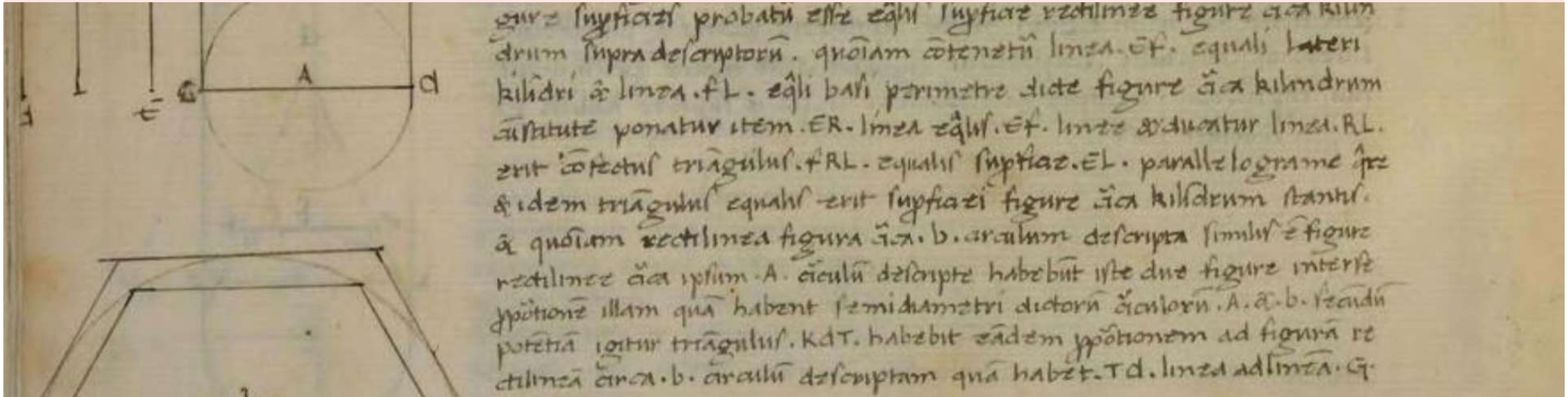
La Cerere ritrovata, ossia La celeste venagione

Antonio Cigliola
Università degli Studi *Roma Tre*
Istituto Comprensivo *E.Q. Visconti*, Roma



Workshop

Matematica e Latino nella Scuola secondaria di secondo grado

II edizione - Roma, 4-5 aprile 2025

La successione di Titius-Bode

Considieriamo i numeri

0 3 6 12 24 48 96

che, dal terzo in poi, sono ognuno il doppio del precedente. Ora **aggiungiamo 4** ad ognuno

4 7 10 16 28 52 100

e **dividiamo tutto per dieci**:

0,4 0,7 1 1,6 2,8 5,2 10

La successione di Titius-Bode

Tali numeri danno, con buona approssimazione, le *distanze* dei primi pianeti del sistema solare espresse in unità astronomiche (1UA ≈ 150.000Km):

PIANETA	DISTANZA MEDIA DAL SOLE (in UA)	NUMERO DI TITIUS-BODE
Mercurio	0,387	0,4
Venere	0,723	0,7
Terra	1	1
Marte	1,524	1,6
???		2,8
Giove	5,203	5,2
Saturno	9,582	10

Il pianeta mancante

Saltava però all'occhio lo spazio vuoto in corrispondenza del numero teorico

d=2,8

in corrispondenza del quale non si conosceva alcun pianeta tra Marte e Giove.

PIANETA	DISTANZA MEDIA DAL SOLE (in UA)	NUMERO DI TITIUS-BODE
Marte	1,524	1,6
???		2,8
Giove	5,203	5,2

La scoperta di Urano

L'ulteriore conferma arrivò per Bode quando **Herschel** nel 1781 scoprì il pianeta **Urano** a distanza 19,2UA dal Sole, dato che si discostava del 2% dal numero

$$\boldsymbol{d = \frac{3 \cdot 2^6 + 4}{10} = \frac{3 \cdot 64 + 4}{10} = \frac{196}{10} = 19,6}$$

calcolato teoricamente per k=6.

La **generale aspettativa** di trovare nel cielo un **pianeta tra Marte e Giove** era ormai ampiamente diffusa tra gli astronomi.

La celeste venagione

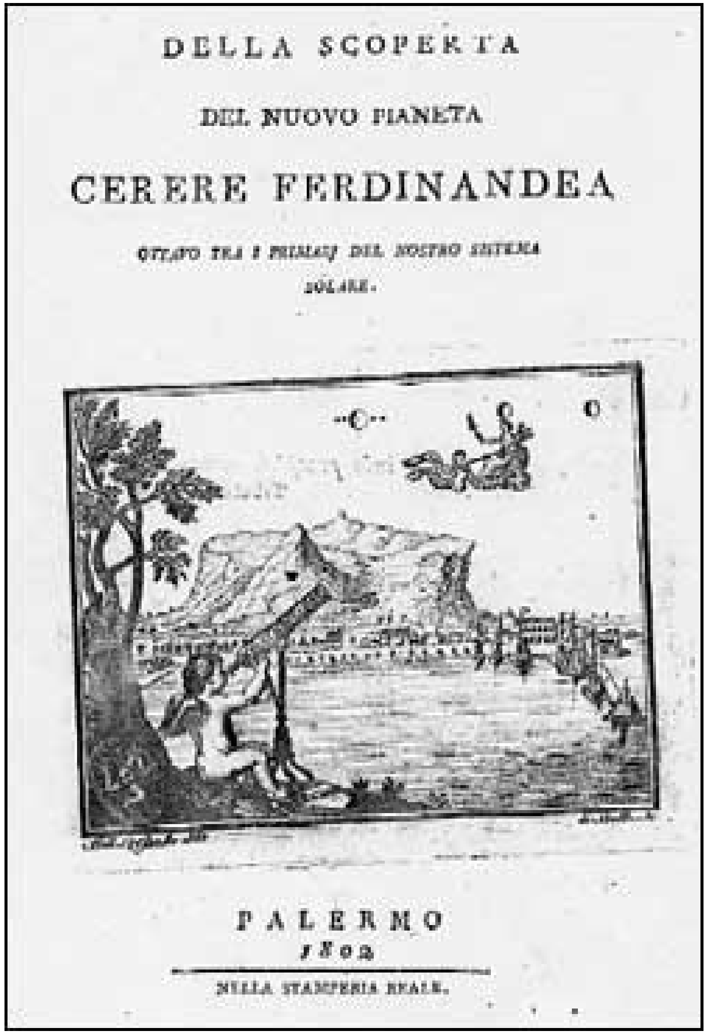
Nel 1800 si riunì la **seconda edizione** del **Congresso degli Astronomi Europei** e venne fondata la ***Himmelspolizey*** **(Polizia Celeste)** composta da 24 astronomi, *armati* di telescopio, a cui fu assegnato una porzione del cielo da studiare.

Essa aveva lo scopo di aggiornare gli atlanti stellari. Si sarebbe cercato inoltre il **pianeta mancante** tra Marte e Giove.

Facevano parte di questo corpo tra gli altri:

- Bode, Olbers, Von Zach
- Herschel
- Oriani, **Piazzi**

La scoperta di Cerere



DELLA SCOPERTA

DEL NUOVO PIANETA

CERERE FERDINANDEA

OTTAVO TRA I PRIMARJ DEL NOSTRO SISTEMA SOLARE.

PALERMO

1802

NELLA STAMPERIA REALE.

La scoperta di Cerere

Possiamo leggere i dettagli delle sue osservazioni nelle due memorie

- **Risultati delle osservazioni della nuova stella** del 1801
- ***Della scoperta del nuovo pianeta Cerere Ferdinandea*** del 1802

dedicate al principe Ferdinando di Borbone e in numerose **lettere** indirizzate ai suoi corrispondenti astronomi europei. Notevoli sono quelle scambiate con Oriani di Milano, **editate da Shiaparelli**.

La scoperta di Cerere

Prima che lo raggiungesse la nomina come membro della polizia celeste, il **primo gennaio del 1801** l'astronomo palermitano **Giuseppe Piazzi** osservò nella costellazione del Toro un corpo luminoso che ipotizzò essere l'87° delle stelle fisse elencate dall'abate **Lacaille** nel suo *Catalogo delle stelle Zodiacali*.

Tornando ad osservarla il giorno dopo si rese conto però che **la sua posizione era cambiata**. Temendo in un errore la riosservò nei giorni seguenti e dedusse che quel corpo celeste invece si muoveva, non era pertanto una stella.

La scoperta di Cerere

Procedendo con prudenza Piazzi preferì annunciare con delle lettere a **Oriani** (Milano) a **Lalande** (Parigi) e a **Bode** (Berlino) che aveva scoperto una nuova cometa, anche se l'assenza di nebulosità e la lentezza nei movimenti rendevano più probabile si trattasse di un pianeta.

«Sebbene le attuati ***circostanze politiche*** *abbiano interrotta ogni nostra corrispondenza, azzardo nientedimeno di scrivervi* [...] *Io ho annunziato questa stella come* ***cometa****, ma il non essere essa accompagnata da* ***alcuna nebulosità****, e più il suo movimento cosi lento e piuttosto uniforme, mi ha fatto più volte cadere nell' animo che forse possa essere* ***qualche cosa di meglio di una cometa****.»*

(*Lettera* di Piazzi a Oriani, 24 gennaio 1801)

La Cerere nascosta

Purtroppo l'astro entrò in **congiunzione col Sole** e, anche a causa di una malattia, non gli fu possibile osservarlo. Non aveva però più dubbi sulla sua natura.

*«Si continuarono interrottamente le osservazioni sino agli 11 di Febbrajo, dopo del qual tempo, **essendosi la Stella molto avvicinata al Sole**, non fu più possibile di vederla nel suo passaggio al meridiano. [...] Quelle però, che fatte si sono, **sebbene non siano alla necessaria distanza onde accertarci del vero cammino**, che questa Stella tiene in Cielo, bastano però, per quanto io giudico, a farci con sicurezza riconoscere la natura del medesimo, come da' risultati, che ne ho dedotti, si può raccogliere.»*

(ibidem)

La Cerere perduta

Com'era naturale aspettarsi, la notizia di questa scoperta entusiasmò Bode, allora direttore dell'osservatorio di Berlino.

Purtroppo però l'**astro *Cerere Ferdinandea*** (sul **nome** del quale si discuteva) sfuggì alle osservazioni successive, non fu facile ritrovarlo ed andò **smarrito**.

*«Ma noi eravamo già al mese di **Dicembre**, **senza che niente si fosse scoperto ancora**. Con questi elementi erasi inutilmente cercato in Ottobre e in Novembre dai Signori Zach, Bode, Maskeline, Messier, ed altri. Già **temevasi, che non si sarebbe più veduto**»*

(Piazzi, *Della scoperta*, 1802)

La Cerere perduta

Molti astronomi (soprattutto i poliziotti celesti) tentarono il calcolo dell'orbita di Cerere e si trovarono diverse **ellissi** o **circonferenze.**

Queste però non erano soddisfacenti poiché non si accordavano mai totalmente con i pochi dati rilevati da Piazzi.

I metodi di calcolo delle orbite allora utilizzati erano il metodo di

- **Keplero-Newton** (servono masse e distanza)
- **Eulero** (per approssimazioni lineari, poco preciso)
- **Lambert** (indip. da eccentricità, servono tempi lunghi)
- **Laplace** (servono numerose osservazioni)

La Cerere perduta

Laplace arrivò a pensare che il problema, per come era posto, era **privo di soluzioni**.

Le orbite approssimate che erano state calcolate però non funzionavano infatti non erano servite per **ritrovare l'astro** nel cielo. Qualcuno poi cominciò addirittura a **dubitare delle dichiarazioni di Piazzi**.

Nella memoria del 1802 Piazzi ci racconta quei mesi frenetici:

«A ricercarlo pertanto si volsero generalmente tutti gli Osservatori, ed è difficile a dirsi quanti travagli, quante pene abbiano essi incontrato per venirne a termine.»

(Piazzi, *Della scoperta*, 1802)

La Cerere ritrovata

*«e senza un **Giovine Geometra**, pieno di talenti, e pieno di modestia, che ravvivò le quasi perdute speranze, forse da più di un Astronomo ne sarebbe stata per sempre abbandonata ogni maggiore ricerca. Questi è il **Dottor Gauss di Brunswich**, il quale con sorprendente sagacità combinate avendo le mie osservazioni, dopo **penosi complicatissimi calcoli**, seppe in fine ricavarne un'**ellissi**»*

(Piazzi, *Della scoperta*, 1802)

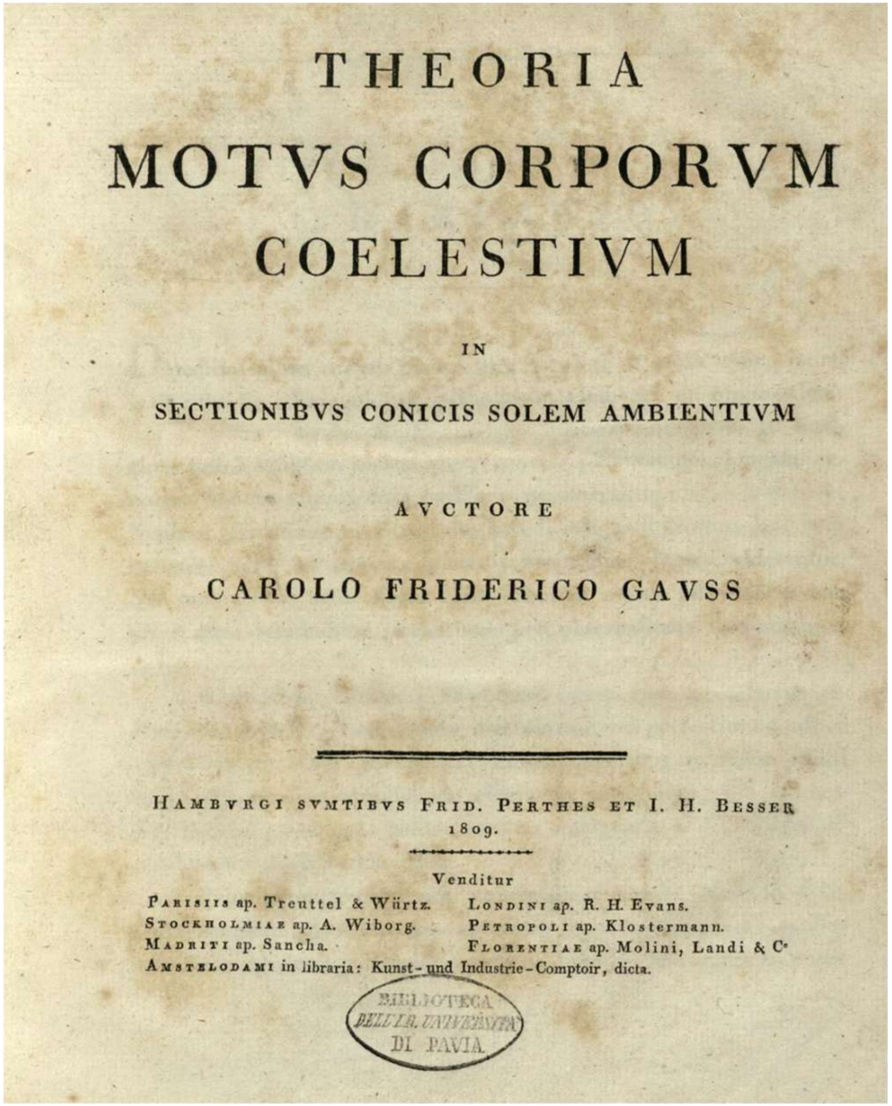
La Cerere ritrovata

Grazie ai calcoli suggeriti da Gauss, **von Zach** ritrovò Cerere il 7 dicembre e **Olbers** il 31 dicembre del **1801**, un anno dopo la sua scoperta e dopo mesi e mesi di ricerche e tentativi vani.

Successivamente furono scoperti altri corpi celesti nelle stessa zona tra Marte e Giove: Pallade, Vesta, Juno, Psyche etc. Ora sappiamo che sono migliaia e costituiscono la **fascia di Kuiper**.

Bode fu soddisfatto per il ritrovamento del nuovo pianetino, ma la scoperta di **Nettuno** e **Plutone** hanno messo in crisi la sua **regola** che è ormai stata **abbandonata** e viene trattata come pura coincidenza.

La *Theoria motus corporum*


THEORIA

MOTVS CORPORVM

COELESTIVM

IN

SECTIONIBVS CONICIS SOLEM AMBIENTIVM

AVCTORE

CAROLO FRIDERICO GAVSS

HAMBVRGI SVMTIBVS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER

1809.

Venditur

PARISIIS ap. Treuttel & Würtz.
STOCKHOLMIAE ap. A. Wiborg.
MADRITI ap. Sancha.
LONDINI ap. R. H. Evans.
PETROPOLI ap. Klostermann.
FLORENTIAE ap. Molini, Landi & C°
AMSTELODAMI in libraria: Kunst- und Industrie-Comptoir, dicta.

La *Theoria motus corporum*

Gauss pubblicò nel **1809** il suo metodo in un trattato latino, la ***Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.***

È diviso in diverse sezioni che trattano:

- lo studio delle **relazioni** tra le diverse grandezze e delle leggi che descrivono il moto del corpo celeste
- lo studio delle **orbite** che sono sezioni **coniche**
- i **metodi di calcolo** per le orbite a seconda delle osservazioni a disposizione

La **lingua latina** utilizzata è **elegantissima**, la **matematica** trattata **complessa** e **rigorosa**.

Brani antologici

«Detectis legibus motus planetarum ***Kepleri*** *ingenio non defuerunt subsidia ad singulorum planetarum elementa ex observationibus eruenda.* ***Tycho Brahe*** [...] *cunctos planetas per longam annorum seriem summa cura tantaque perseverantia observaverat, ut Keplero talis thesauri dignissimo heredi seligendi tantummodo cura restaret, quae ad scopum quemvis propositum facere viderentur.* ***Nec mediocriter sublevabant*** *hunc laborem motus planetarum medii summa iamdudum praecisione per* ***observationes antiquissimas*** *determinati.»*

(dalla *Praefatio*)

Brani antologici

Gauss ci riassume anche **le tre leggi di Keplero** in una maniera piuttosto involuta, volendo usare un solo periodo e scegliendo di non scrivere formule per la terza legge:

*«Scilicet observationum testimonio fretus Kepler cuiusvis planetae **orbitam ellipsem esse** pronunciaverat, in qua **areae** circa **Solem, focum alterum** ellipsis **occupantem**, **uniformiter describantur**, et quidem ita, ut **tempora revolutionum** in ellipsibus diversis sint **in ratione sesquialtera semiaxium maiorum**.»*

(ibidem)

Brani antologici

Le ricerche di **Newton** hanno reso possibile la comprensione del **moto delle comete**, dopo molti secoli di tentativi e sforzi della comunità scientifica in cui erano viste quasi come dei *nemici*.

«Iam filum repertum, quo ducente labyrinthum ***motuum cometarum*** *antea inaccessum ingredi licuit. Quod tam feliciter successit,* [...] ***orbitas parabolas esse****. Ita systema gravitationis universalis novos analysi triumphos eosque splendidissimos paraverat;* ***cometae****que usque ad illum diem* ***semper indomiti****,* [...] *iisdem quibus* ***planetae legibus aeternis religiose obtemperantes****.»*

(ibidem)

Brani antologici

Gauss ci racconta di aver ideato questo metodo per **calcolare l'orbita** del pianeta **Cerere** scoperto da Piazzi di Palermo:

*«Scilicet eodem circiter tempore rumor de **planeta novo** Ian. 1 istius anni in specula Panormitana detecto [...] ab **astronomo praestantissimo Piazzi** institutae ad notitiam publicam pervenerunt.*

***Nullibi** sane **in annalibus** astronomiae occasionem tamgravem **reperimus**, vixque gravior excogitari posset, ad dignitatem istius problematis luculentissime ostendendam, quam tunc in tanto»*

(ibidem)

Equazioni polari delle coniche

Hoc modo fit $x = r \cos v$, adeoque formula nostra $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$, vnde protinus deriuantur conclusiones sequentes:

I. Pro $v = 0$ valor radii vectoris r fit minimum, puta $= \frac{p}{1+e}$: hoc punctum *perihelium* dicitur.

II. Valoribus oppositis ipsius v respondent valores aequales ipsius r; quocirca linea apsidum sectionem conicam in duas partes aequales dirimit.

III. In *ellipsi* r inde a $v = 0$ continuo crescit, donec valorem maximum $\frac{p}{1-e}$ assequatur in *aphelio* pro $v = 180°$; post aphelium eodem modo rursus decrescit, quo ante increuerat, donec pro $v = 360°$ perihelium denuo attigerit. Li-

Alcune identità goniometriche

I. Denotantibus A, B, C angulos quoscunque, habetur

$$\sin A \sin(C-B) + \sin B \sin(A-C) + \sin C \sin(B-A) = 0$$

$$\cos A \sin(C-B) + \cos B \sin(A-C) + \cos C \sin(B-A) = 0$$

II. Si duae quantitates p, P ex aequationibus talibus

$$p \sin(A-P) = a$$

$$p \sin(B-P) = b$$

determinandae sunt, hoc fiet generaliter adiumento formularum

$$p \sin(B-A) \sin(H-P) = b \sin(H-A) - a \sin(H-B)$$

$$p \sin(B-A) \cos(H-P) = b \cos(H-A) - a \cos(H-B)$$

in quibus H est angulus arbitrarius. Hinc deducuntur (art. 14, II) angulus

L'equazione di Keplero

VII. $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \ \operatorname{tang}\left(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi\right)$

VIII. $\sin E = \dfrac{r \sin v \cos \varphi}{p} = \dfrac{r \sin v}{a \cos \varphi}$

IX. $r \cos v = a(\cos E - e) = 2\, a \cos\left(\tfrac{1}{2} E + \tfrac{1}{2}\varphi + 45^\circ\right) \cos\left(\tfrac{1}{2} E - \tfrac{1}{2}\varphi - 45^\circ\right)$

X. $\sin \tfrac{1}{2}(v - E) = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sin v \sqrt{\dfrac{r}{p}} = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sin E \sqrt{\dfrac{a}{r}}$

XI. $\sin \tfrac{1}{2}(v + E) = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin v \sqrt{\dfrac{r}{p}} = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin E \sqrt{\dfrac{a}{r}}$

XII. $M = E - e \sin E$

Esempio dei calcoli «penosi e complicatissimi»

Hinc

$\log \sin \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} \ldots 9{,}7456225$

$\log \cos \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} \ldots 0{,}1286454\, n$

vnde $\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = 9{,}6169771\, n$

$\tfrac{1}{2} v = 157^\circ 30' 41'' 50$

$v = 315 \quad 1 \quad 23{,}00$

$\log \cos \tfrac{1}{2} v \ldots\ldots 9{,}9656515\, n$

$\log \sqrt{r} \ldots\ldots 0{,}1629939$

$\log r \ldots\ldots 0{,}3259878$

III. His methodis tertiam adiicimus, quae aeque fere expedita est ac secunda, sed praecisione, si vltima desideretur, isti plerumque praeferenda. Scilicet primo determinatur r per aequationem III, ac dein v per X. Ecce exemplum nostrum hoc modo tractatum:

$\log e \ldots\ldots 9{,}3897262$

$\log \cos E \ldots\ldots 9{,}9094637$

$9{,}2991899$

$e \cos E = \quad 0{,}1991544$

$\log a \ldots\ldots 0{,}4224389$

$\log(1 - e \cos E) \ldots 9{,}9035488$

$\log r \ldots\ldots 0{,}3259877$

$\log \sin E \ldots\ldots 9{,}7663366\, n$

$\log \sqrt{(1 - e \cos E)} \ldots 9{,}9517744$

$9{,}8145622\, n$

$\log \sin \tfrac{1}{2} \varphi \ldots\ldots 9{,}0920395$

$\log \sin \tfrac{1}{2}(v - E) \ldots\ldots 8{,}9066017\, n$

$\tfrac{1}{2}(v - E) = -4^\circ 37' 33'' 24$

$v - E = -9 \quad 15 \quad 6{,}48$

$v = 315 \quad 1 \quad 23{,}02$

Ad calculum confirmandum formula VIII vel IX percommoda est, praesertim, si v et r per methodum tertiam determinatae sunt. Ecce calculum:

$\log \frac{a}{r} \sin E \ldots 9{,}8627878\, n$

$\log \cos \varphi \ldots 9{,}9865224$

$9{,}8493102\, n$

$\log \sin v \ldots\ldots 9{,}8493102\, n$

$\log \sin E \sqrt{\frac{a}{r}} \ldots 9{,}8145622\, n$

$\log \cos \tfrac{1}{2} \varphi \ldots\ldots 9{,}9966567$

$9{,}8112189\, n$

$\log \sin \tfrac{1}{2}(v + E) \ldots 9{,}8112189\, n$

Sviluppi in serie e in frazione continua

obtinemus aequationem

$$\tfrac{8}{3}(\alpha x+(2\beta-\alpha)xx+(3\gamma-2\beta)x^3+(4\delta-3\gamma)x^4+\text{etc.})=(8-4\alpha)x+(8\alpha-4\beta)xx$$
$$+(8\beta-4\gamma)x^3+(8\gamma-4\delta)x^4+\text{etc.}$$

quae identica esse debet. Hinc colligimus $\alpha=\frac{6}{5}$, $\beta=\frac{8}{7}\alpha$, $\gamma=\frac{10}{9}\beta$, $\delta=\frac{12}{11}\gamma$ etc., vbi lex progressionis obuia est. Habemus itaque

$$X=\tfrac{4}{3}+\frac{4.6}{3.5}x+\frac{4.6.8}{3.5.7}xx+\frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}x^3+\frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11}x^4+\text{etc.}$$

Hanc seriem transformare licet in fractionem continuam sequentem:

$$X=\cfrac{\frac{4}{3}}{1-\cfrac{\frac{6}{5}x}{1+\cfrac{\frac{2}{5.7}x}{1-\cfrac{\frac{5.8}{7.9}x}{1-\cfrac{\frac{1.4}{9.11}x}{1-\cfrac{\frac{7.10}{11.13}x}{1-\cfrac{\frac{3.6}{13.15}x}{1-\cfrac{\frac{9.12}{15.17}x}{1-\text{etc.}}}}}}}}}$$

Probabilità ed errori: la «gaussiana»

Porro facile perspicitur, k necessario negatiuam esse debere, quo Ω reuera fieri possit maximum, quamobrem statuemus $\frac{1}{2}k = -hh$; et quum per theorema elegans primo ab ill. Laplace inuentum, integrale $\int e^{-hh\Delta\Delta}\, d\Delta$, a $\Delta = -\infty$ vsque ad $\Delta = +\infty$, fiat $= \frac{\sqrt{\pi}}{h}$, (denotando per π semicircumferentiam circuli cuius radius 1), functio nostra fiet

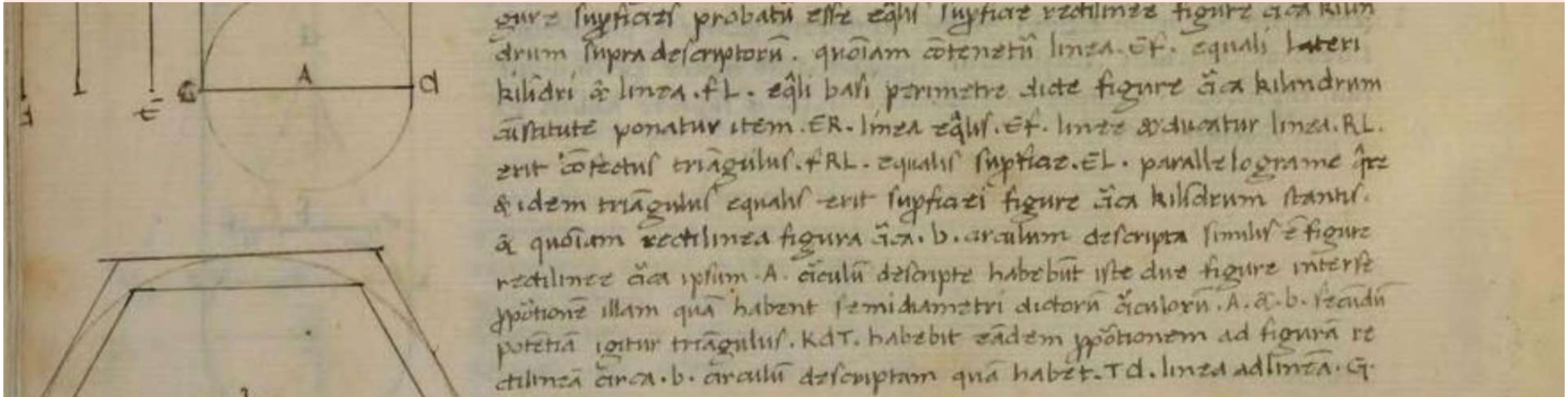
$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-hh\Delta\Delta}$$

Collegamenti interdisciplinari

- **Storia**: il passaggio dalla rivoluzione francese all'età napoleonica, la fuga dei Borbone in Sicilia e l'isolamento del Sud Italia
- **Filosofia** ed **Epistemologia**: può una regola senza giustificazione teorica essere presa come valida perché confermata da alcune osservazioni? La disputa tra Hegel e gli *aprioristi*.
- **Matematica**: le sezioni coniche in equazioni polari, la teoria degli errori, la campana di Gauss, la goniometria
- **Latino**: letteratura latina scientifica
- **Letteratura**: le lettere e le memorie di Piazzi
- **Fisica**: le leggi Keplero e Newton

La Cerere ritrovata, ossia La celeste venagione

Antonio Cigliola
Università degli Studi *Roma Tre*
Istituto Comprensivo *E.Q. Visconti*, Roma



Workshop

Matematica e Latino nella Scuola secondaria di secondo grado

II edizione - Roma, 4-5 aprile 2025