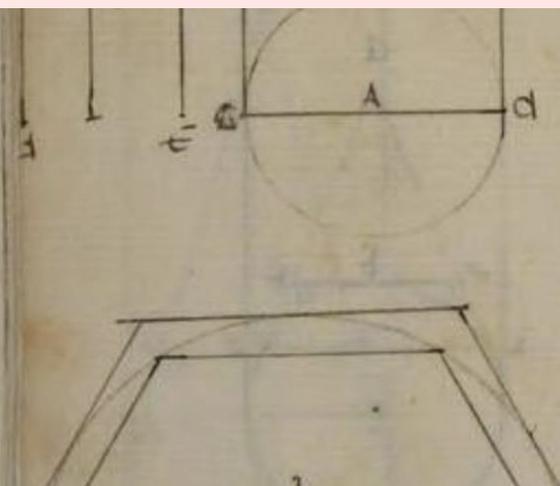


La teoria delle maree.

Evoluzione di un modello matematico dal I secolo d.C. a Newton.

R. Mori e G. Rugge, Liceo «E. Majorana», Desio (MB)



curvæ superficiæ probatū esse eadē superficiæ rectilineæ figuræ circa kili-
ndrum supra descriptorū. quoniam cōtinetū linea. ef . equali lateri
kiliūdrī ē linea. fl . eqli basi perimetro dicte figuræ cōca kiliūdrum
cūstatute ponatur itē. er . linea eqli. ef . linæ aduatur linæ. rl .
erit cōfectus triāgulus. frl . equalis superficiæ. el . parallelogrammē qre
ē idem triāgulus equalis erit superficiæ figuræ cōca kiliūdrum stantū.
ē quōdam rectilinea figurā cōca. b . arcūm descripta similis ē figuræ
rectilineæ cōca ipsūm. A . cūclū descripte habebūt iste due figuræ interse
ppōtionē illam quā habent semidiametri dictorū cūclorū. A . a . b . secūdu
pōtētiā igitur triāgulus. kdt . habebit eadē ppōtionem ad figurā re
ctilineā cōca. b . arcūm descriptam quā habet. td . linæ ad linæ. g .

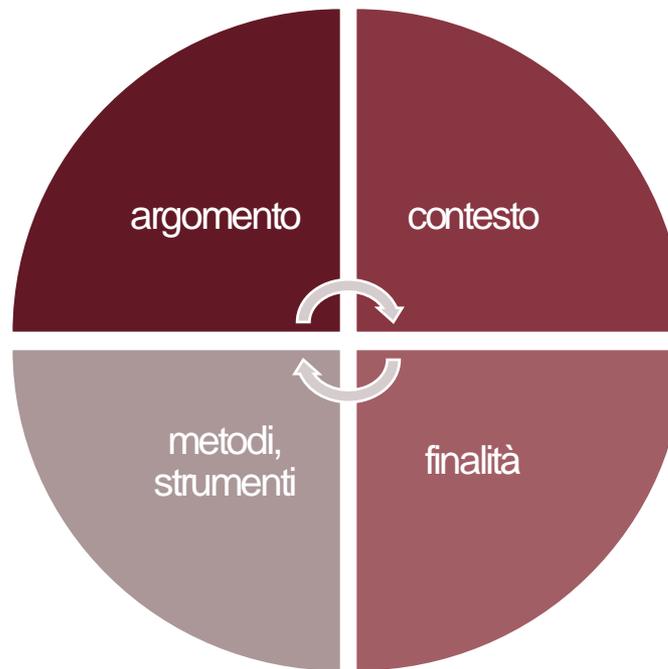
Workshop «Matematica e Latino nella Scuola secondaria di
secondo grado»

Il edizione - Roma, 4-5 aprile 2025

Struttura del percorso didattico

1. maree in Seneca, Plinio e Newton
2. indagine quantitativa sulle maree

1. didattica laboratoriale
2. interdisciplinarietà



- IV anno del liceo scientifico tradizionale

1. idea di «progresso» nella scienza
2. modellizzare la realtà

Le maree in Plinio il Vecchio



Andrea da Firenze, *miniatura* 1457

Le maree in Plinio il Vecchio: il laboratorio (1)

Naturalis historia II,212-218

*Aestus mari accedere ac reciprocare maxime mirum, pluribus quidem modis, verum causa in sole lunaque. Bis inter duos exortus lunae adfluunt bisque remeant, vicenis quaternisque semper horis, et **primum** attollente se cum ea mundo intumescentes, **mox** a meridiano caeli fastigio vergente in occasum residentes, **rursusque** ab occasu subter ad caeli ima et meridiano contraria accedente inundantes, **hinc**, donec iterum exoriatur, se resorbentes.*

Esercizi di comprensione:

- a) Qual è la causa delle maree?
- b) Ogni quanto la luna esercita il suo influsso?
- c) Quale intervallo di tempo trascorre tra un ciclo e l'altro?
- d) Individua i quattro avverbi che scandiscono le maree a seconda dei movimenti della luna.
- e) Quali sono i termini che indicano alta marea e quali bassa marea?

Seneca *De providentia* I,3 e *Naturales quaestiones* III,28,6 solo come premessa.

Le maree in Plinio il Vecchio: il laboratorio (2)

Nel paragrafo successivo si dice che, nonostante le maree non si verificano sempre alla stessa ora, l'intervallo tra una e l'altra è uguale: sei in grado di dire a quante ore corrisponde? Hai capito che tipo di numerale viene utilizzato e perché? Rispondi anche alla seguente domanda: perché per definire il numero di ore Plinio fa riferimento alle ore equinoziali e non a quelle comuni? Come si contavano le ore del mondo romano?

Nec umquam eodem tempore quo pridie reflui, [...], paribus tamen intervallis reciproci senisque semper horis, non cuiusque diei aut noctis aut loci, sed aequinoctialibus ideoque inaequales vulgarium horarum spatio, utcumque plures in eos aut diei aut noctis illarum mensurae cadant [...]

comprensione del
testo

ripasso di nozioni
grammaticali e
lessicali

ripresa di dati
culturali

Le maree in Plinio il Vecchio: il laboratorio (3)

Il testo prosegue con l'affermazione secondo la quale vi sono delle variazioni delle maree legate ai cicli lunari. Prima di tutto leggi il passo in latino, dal quale sono stati tolti sintagmi o parole (*augentur, exundant, maxime, mitiores, modici*) e completalo reinserendoli nello spazio corretto.

Primumque septenis diebus quippe _____ a nova ad dividuam aestus <sunt>, pleniores ab ea _____ plenaque _____ fervent. inde mitescunt, pares ad septimam primis, iterumque alio latere dividua _____. [...] Eadem in aquilonia et a terris longius recedente _____ quam cum in austros digressa propiore nisu vim suam exercet. [...]

Quando le maree sono più modeste, quando più forti rispetto al ciclo lunare? Le maree poi hanno una maggior o minor intensità a seconda della distanza della luna dalla Terra?

Plinio a questo punto corregge un'affermazione precedente: di quanto è lo scarto rispetto a luna piena o nuova? Di quanto rispetto a quando è alla massima distanza dall'orizzonte?

Nec tamen in ipsis quos dixi temporum articulis, sed paucis post diebus, sicuti neque in plena aut novissima, sed postea, nec statim ut lunam modus ostendat occultetve aut media plaga declinet, verum fere duabus horis aequinoctialibus serius.

Le maree in Plinio il Vecchio: il laboratorio (4)

Leggi ora i paragrafi in cui Plinio evidenzia la differenza delle maree tra oceano e mare.

*Omnes autem aestus in oceano maiora integunt spatia nudantque quam in reliquo mari, **sive quia** in totum universitate animosius quam parte est, **sive quia** magnitudo aperta sideris vim laxae grassantis efficacius sentit, eandem angustiis arcentibus. [...] octogenis cubitis supra Britanniam intumescere aestus Pytheas Massiliensis auctor est. Et interiora autem maria terris cluaduntur ut portu; quibusdam tamen in locis spatiosior laxitas dicioni paret, utpote cum plura exempla sint in tranquillo mari nulloque velorum pulsu tertio die ex Italia pervectorum Uticam aestu fervente.*

- a) Quali sono i due motivi per i quali le maree nell'oceano coprono aree più vaste?
- b) Plinio cita una fonte, il geografo greco del IV secolo a.C. Pitea di Marsiglia, che afferma che le maree a nord della Britannia hanno un'estensione di 80 cubiti: a quanto corrisponde la misura nel sistema metrico decimale?
- c) Per provare che le maree sono però a volte potenti anche in mari chiusi come il Mediterraneo, Plinio cita la rotta che dall'Italia porta a Utica in tre giorni senza dover ricorrere alle vele (*nullo pulso velorum*) ma solo *aestu fervente*. Dove si trova Utica? Quale personaggio famoso dell'antichità vi è associato?

Le maree in Plinio il Vecchio: le conclusioni

Attraverso questi esercizi, gli studenti hanno compreso i punti salienti del ragionamento pliniano:

1. la marea in 24 ore si alza e si abbassa due volte, a seconda della posizione dell'astro rispetto all'orizzonte;
2. nonostante la marea non si verifichi mai alla stessa ora del giorno precedente, l'intervallo di tempo che separa i due massimi o minimi successivi del livello delle acque è costante;
3. l'intensità della marea aumenta con il crescere della luna, mentre diminuisce quando essa è calante;
4. più è vicina, maggiore è la forza esercitata dalla luna;
5. in realtà il livello massimo di marea non si raggiunge quando la luna si trova alla massima distanza dall'orizzonte, ma due ore dopo; parimenti un ritardo di alcuni giorni si verifica rispetto al ciclo mensile;
6. le maree sono più ampie nell'oceano che nel mare;
7. saper sfruttare le maree può essere estremamente utile per la navigazione.

I *Principia* di Newton



Le maree in Newton: gli snodi principali

Abbiamo analizzato la proposizione 24 (*Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunae oriri debere*) del III libro attraverso opportune semplificazioni: il testo è stato frazionato e presentato nelle sue linee essenziali, secondo il procedimento già messo in atto con il brano di Plinio. In sostanza, gli snodi argomentativi della proposizione sono i seguenti:

1. introduzione alle cause delle maree: il ruolo del Sole e della Luna;
2. effetti di congiunzioni e opposizioni di Sole e Luna sulla portata delle maree;
3. variazioni delle maree in funzione di perigeo e apogeo di Sole e Luna;
4. impatto della declinazione di Sole e Luna su regolarità e intensità delle maree.

Non sono stati affrontate le parti sulle variazioni delle maree dovute alla latitudine dei luoghi e quelle relative alle modifiche nella propagazione delle maree con relativi esempi.

Le maree in Newton: il testo (1)

1. introduzione alle cause delle maree: il ruolo del Sole e della Luna

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci minori quam sex horarum spatio sequi, [...] in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

2. effetti di congiunzioni e opposizioni di Sole e Luna sulla portata delle maree

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjugentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ακμην venient.

Le maree in Newton: il testo (2)

3. variazioni delle maree in funzione di perigeo e apogeo di Sole e Luna

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantis a Terra. In minoribus enim distantis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

4. impatto della declinazione di Sole e Luna su regolarità e intensità delle maree

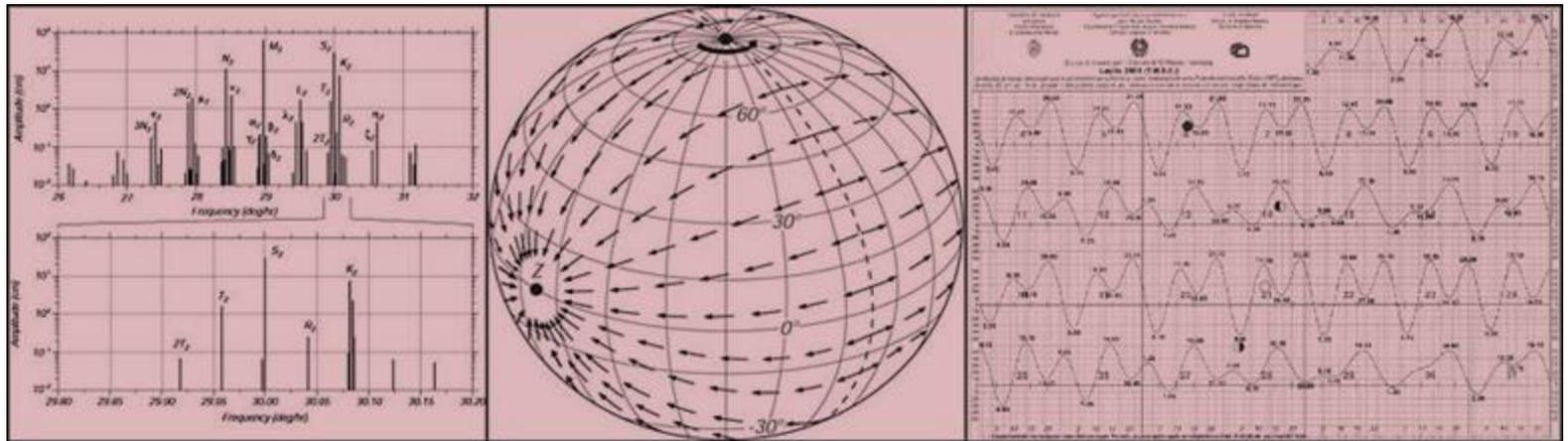
Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensione & remissione, adeoque nullam motus reciprocationem cietet. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum versus effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in Syzygiis Solstitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygiis & minimi in Quadraturis Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

Le maree in Newton: le conclusioni

Letto il testo di Newton, agli studenti si è chiesto di elaborare uno schema con le caratteristiche delle maree, sempre attraverso **domande guida**:

- ogni quanto, nell'arco di un giorno, c'è alta marea? Ogni quanto bassa? Riporta l'espressione latina con cui rispondi alla domanda;
 - che cosa ci dice che la forza della Luna è superiore a quella del Sole nel provocare le maree? Cita il termine latino utilizzato da Newton;
 - le maree variano in base ad apogeo e perigeo dalla luna?
1. Il livello dell'oceano si alza e si abbassa circa due volte al giorno. L'intervallo di tempo fra due alte maree è di 12 ore e 25 minuti;
 2. l'escursione mareale non è costante, ma è massima con la luna piena e al novilunio, mentre è minima quando la Luna è in quadratura con il Sole (al primo e al terzo quarto);
 3. l'escursione mareale dipende fortemente dalla forma delle coste.

L'indagine quantitativa



Prerequisiti

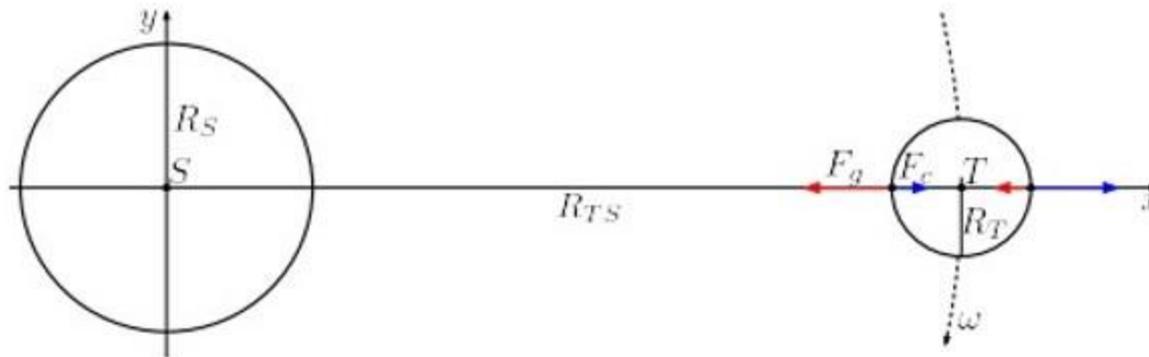
- La definizione di baricentro di un sistema costituito da due corpi sferici.
- Il secondo e il terzo principio della Dinamica.
- L'espressione vettoriale della forza di attrazione gravitazionale tra due corpi sferici e della forza centrifuga.
- Il secondo teorema del guscio sferico.
- Il principio dei vasi comunicanti.

Maree solari: le ipotesi semplificatrici del modello

- La Terra è perfettamente sferica e con densità costante.
- L'orbita terrestre è circolare.
- Il baricentro del sistema Terra-Sole è posto nel centro della stella.
- La Terra ruota attorno al Sole con velocità angolare costante ω
- La Terra è ricoperta da uno strato d'acqua di altezza media h

Maree solari: il modello matematico (1)

- Nel centro della Terra la forza di attrazione gravitazionale e quella centrifuga si equilibrano, mentre nei punti più vicini al Sole si ravvisa un eccesso di forza centripeta e in quelli più lontani da esso un eccesso di forza centrifuga.
- Cosa avviene invece nei punti di coordinate $(R_{TS}; r)$?
- E in quelli di coordinate $(R_{TS} + r; 0)$?



Maree solari: il modello matematico (2)

Considerato un triangolo di vertici $S(0; 0)$, $T(R_{TS}; 0)$ e $P(R_{TS}, r)$, per mezzo del teorema di Pitagora è possibile mostrare che

$$\overline{PS} = \sqrt{R_{TS}^2 + r^2} = \sqrt{R_{TS}^2 \left(1 + \frac{r^2}{R_{TS}^2}\right)} = R_{TS} \sqrt{1 + \frac{r^2}{R_{TS}^2}}.$$

Facendo poi ricorso alla formula di linearizzazione della funzione

$$f(x) = (1 + x)^\alpha,$$

ove $x = \frac{r^2}{R_{TS}^2}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, è possibile vedere che

$$\overline{PS} = R_{TS} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_{TS}^2}\right).$$

Siccome tutti i contributi dati da potenze maggiori o uguali a 2 del rapporto $\frac{r}{R_{TS}}$ possono essere trascurati, poiché neppure i dispositivi più sofisticati riuscirebbero ad apprezzarli, se ne conclude che

$$\overline{PS} = R_{TS}.$$

Pertanto, in tutti i punti che possiedono tali coordinate l'effetto della forza di attrazione gravitazionale e di quella centrifuga si pareggia perfettamente.

Maree solari: il modello matematico (3)

Invece, detto Q un punto di coordinate $(R_{TS} + r; 0)$ possiamo osservare che

$$\overline{QS} = R_{TS} \left(1 + \frac{r}{R_{TS}} \right)$$

e quindi il contributo di $\frac{r}{R_{TS}}$, essendo quest'ultimo lineare, non può essere trascurato.

Gli effetti della forza di attrazione gravitazionale e quelli della forza centrifuga non saranno più bilanciati fra loro. Piuttosto la loro somma darà luogo alla cosiddetta forza mareale, la cui espressione vettoriale è

$$\vec{F} = 3 \frac{GmM_S r}{R_{TS}^3} \hat{x},$$

dove M_S e m sono rispettivamente la massa solare e la massa di un qualsivoglia corpo posizionato in Q .

Maree solari: il modello matematico (4)

Quali sono gli effetti della forza mareale sull'altezza degli oceani?

Per rispondere a questa domanda è stato ripreso l'esperimento ideale presentato da Newton nella Proposizione 20 del terzo libro dei Principia: immaginiamo di collegare i punti coordinate $(R_{TS}; r)$ e $(R_{TS} + r; 0)$ con il centro della Terra $T(R_{TS}; 0)$ attraverso due tunnel cilindrici e supponiamo poi che l'oceano che ricopre la Terra li riempia; affinché l'acqua sia in equilibrio occorre che il suo peso nei due tunnel sia il medesimo.

Nel tunnel che collega $(R_{TS} + r; 0)$ con T il peso dell'acqua sarà più piccolo rispetto a quello del liquido presente nell'altro tunnel poiché alla forza gravitazionale occorre sottrarre la forza mareale. Ne consegue che, per il principio dei vasi comunicanti, la colonna d'acqua dovrà essere più alta e questa differenza corrisponde esattamente al contributo del Sole all'escursione mareale.

Maree solari: conclusioni

Infine, per mezzo di calcoli piuttosto artificiosi, si giunge a calcolare il contributo del sole all'escursione mareale:

$$A_S = \frac{3}{2} R_T \left[\frac{M_S}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_{TS}} \right)^3 \right],$$

dove R_T , M_S e M_T rappresentano rispettivamente il raggio terrestre, la massa solare e quella del nostro pianeta.

La medesima trattazione potrebbe essere ripetuta per il contributo lunare all'escursione mareale, sebbene comporti uno sforzo speculativo nettamente maggiore.

Tuttavia, riportiamo qui di seguito l'espressione della suddetta quantità:

$$A_L = \frac{3}{2} R_T \left[\frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_{TL}} \right)^3 \right]$$

Maree solari: attività proposte

Terminate le argomentazioni teoriche gli alunni sono stati coinvolti in un'attività che li ha condotti a interrogarsi su quali siano gli effetti della Luna sull'escursione mareale quando essa si trova in diverse posizioni rispetto alla Terra.

Ancora, si è discusso su quali sarebbero gli effetti se al posto del nostro satellite fosse presente un corpo di massa maggiore e quale sarebbe la distanza massima in cui quest'ultimo potrebbe trovarsi senza provocare esiti distruttivi per il nostro pianeta.

Grazie dell'attenzione